

۴ توان عقلانی شدن و حذف متقابل حرکت های مغلوب

در این فصل پیامدهای این الزام به این باور که بازیگر می‌بایست رویکردی سازگار با فرض این که تمامی بازیگران عقلانی بوده، تمامی آنها می‌دانند که دیگران عقلانی هستند، تمامی آنها می‌دانند که سایرین می‌دانند که دیگران عقلانی هستند و این فرایند [تو در توی دانستن] به منظور ایجاد بهینه‌گی تصمیم لازم می‌باشد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۴-۱ توان عقلانی شدن

در فصل‌های دوم و سوم مفاهیم راه‌حلی را برای بازی‌های استراتژیک که در آنها انتخاب بهینه هر بازیگر به فرض صحیح بودن باور وی در مورد رفتار دیگران وابسته است را توضیح دادیم. در واقع فرض نمودیم که هر بازیگر رفتار تعادلی دیگر بازیگران را می‌دانند. اگر بازیگران به کرات در شرایطی که مدل بازی ارائه نموده قرار گرفته باشند آنگاه این دانش را از فضا حالتی که مشاهد نموده‌اند فرا گرفته‌اند. با این وجود، اگر بازی واقع‌ای باشد که تنها یک بار اتفاق خواهد افتاد که در آن تمامی بازیگران حرکت‌هایشان را به طور توأم انتخاب نمایند آنگاه واضح نخواهد بود که چگونه هر بازیگر از حرکت تعادلی دیگران آگاه می‌باشد؛ به این دلیل نظریه پردازان بازی‌ها مفاهیم راه‌حلی را به وجود آورده‌اند که مستلزم این فرض نیستند.

در این فصل مفاهیم راه‌حلی را که دیگر فرض صحیح بودن باور بازیگران در مورد حرکت‌های دیگران وجود ندارد را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. اما این مفاهیم نیز مقید به ملاحظات عقلانی می‌باشند: هر بازیگر بر این باور می‌باشد که حرکت‌هایی که دیگران انجام می‌دهند بهترین پاسخ به باوری است که دارند، از این گذشته، هر بازیگر فرض می‌نماید که دیگر بازیگران به همین شیوه استدلال می‌کنند، و در نتیجه تمامی بازیگران بر این باور هستند که دیگران می‌دانند که حرکت هر بازیگر بهترین پاسخ به باور وی بوده و این فرایند تودرتوی باور داشتن ادامه خواهد داشت.

مفاهیم راه‌حلی‌هایی را که در اینجا مطالعه خواهیم نمود ضعیف‌تر از [مفهوم] تعادل نش می‌باشد. در واقع، در بسیاری از بازی‌ها هیچ حرکتی را از مورد استفاده قرار گرفتن [توسط بازیگران] حذف نمی‌نمایند. با این وجود، مطالعه دلالت منطقی فرضیاتی که در آنها دانش بازیگر ضعیف‌تر از آنچه در فصل‌های گذشته عنوان کردیم هست رویکردی جالب به نظر می‌رسد.

بازی استراتژیک $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ (که مقدار u_i بیانگر اولویت‌های بازیگر بر روی لاتاری‌های $A = \times_{j \in N} A_j$ برای هر $i \in N$ است) را در نظر بگیرید. به منظور بسط ایده اصلی اینگونه راه‌حل‌ها در این فصل لزومی ندارد فرض شود که مجموعه حرکت‌ها A_i برای هر بازیگر متناهی است، هر چند که برای سادگی در بعضی از مباحث آن را متناهی فرض می‌نماییم. باور بازیگر i (در باره حرکت‌های دیگران) یک اندازه احتمال روی $A_{-i} (= \times_{j \in N \setminus \{i\}} A_j)$ است. لازم به ذکر است این تعریف به بازیگر این امکان را می‌دهد به باور نماید حرکت‌های سایرین همبسته می‌باشند: [این] باور لزوماً ضرب اندازه‌های احتمال مستقل روی هر مجموعه حرکت‌های A_j برای $j \in N \setminus \{i\}$ نیست. به همان شیوه گذشته، حرکت $a_i \in A_i$ بازیگر i بهترین پاسخ به باور بازیگر است اگر حرکت دیگری بازدهی بیشتری را با فرض همان باور نتیجه ندهد. به کرات از عبارت "بازیگر i می‌داند که دیگر بازیگر j عقلانی است" استفاده نموده‌ایم، مقصود ما از این عبارت این است که بازیگر i می‌داند که هر عملی بازیگر j انتخاب نماید بهترین پاسخ وی با توجه به باوری است که از حرکت‌های سایر بازیگران به غیر از j دارد می‌باشد.

اگر هر بازیگر i بداند هر بازیگر j دیگر عقلانی است آنگاه او می‌بایست این توان را داشته باشد که باور خودش μ_i را در باره حرکت‌های سایر بازیگران به صورت زیر عقلانی نماید: حرکت هر بازیگر دیگر j می‌بایست احتمال مثبتی بر اساس μ_i داشته باشد و بهترین پاسخ به باور بازیگر j باشد. همچنین نیز اگر بازیگر i بداند که هر بازیگر j دیگر هر بازیگر $h \neq j$ (به انضمام بازیگر i) عقلانی بوده آنگاه بازیگر i می‌بایست از نظر بازیگر j در مورد باورهای بازیگر h آگاه باشد. اگر استدلال بازیگر i عمقی بدون محدودیت داشته باشد به تعریف زیر خواهیم رسید.

▪ تعریف ۱-۴ حرکت $a_i \in A_i$ **توان عقلانی شدن** دارد، اگر در یک بازی استراتژیک $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ موارد زیر وجود داشته باشد

- گردایه $((X_j^t)_{j \in N})_{t=1}^\infty$ از مجموعه‌های $X_j^t \subseteq A_j$ برای تمامی j و t ،
 - باور μ_i^1 بازیگر i که محمل آن زیر مجموعه X_{-i}^1 بوده، و
 - برای هر بازیگر $j \in N$ ، هر $t \geq 1$ ، و هر $a_j \in X_j^t$ ، باور $\mu_j^{t+1}(a_j)$ بازیگر j محملی زیر مجموعه X_{-j}^{t+1} دارد
- به صورتی که
- a_i بهترین پاسخ به باور μ_i^1 بازیگر i است
 - $X_i^1 = \emptyset$ و برای هر $j \in N \setminus \{i\}$ مجموعه X_j^1 مجموعه‌ای برای تمامی $a'_j \in A_j$ به گونه‌ای باشد که a_{-i} هابی در محمل μ_i^1 وجود داشته باشند که $a_j = a'_j$ بوده
 - برای هر بازیگر $j \in N$ و هر $t \geq 1$ هر حرکت $a_j \in X_j^t$ بهترین پاسخ به باور $\mu_j^{t+1}(a_j)$ بازیگر j باشد
 - برای هر $t \geq 2$ و هر $j \in N$ مجموعه X_j^t مجموعه‌ای برای تمامی $a'_j \in A_j$ بوده به گونه‌ای که بازیگری مثل $k \in N \setminus \{i\}$ ، حرکت $a_k \in X_k^{t-1}$ و a_{-k} در محمل $\mu_j^t(a_j)$ که در آن $a_j = a'_j$ وجود داشته باشد.

لازم به ذکر می‌باشد که از لحاظ مفهومی شروط دوم و چهارم در این تعریف زاید هستند؛ اضافه نمودن آنها تنها به واسطه نزدیک نمودن این تعریف به انگیزه اصلی بیان شده بوده است. همچنین، تنها به منظور ساده سازی نشانه‌گذاری، مجموعه X_i^1 را به گردایه $((X_j^t)_{j \in N})_{t=1}^\infty$ اضافه نمودیم هر چند که این مجموعه تهی می‌باشد. اگر $|N| \geq 0$ آنگاه X_i^1 تنها مجموعه زاید و وقتی که $|N| = 2$ باشد تعداد زیادی از چنین مجموعه‌ای وجود خواهد داشت (X_i^t برای هر t فرد، وقتی $i \neq j$ ، X_j^t برای هر t زوج).

مجموعه X_i^1 برای $j \in N \setminus \{i\}$ به صورت مجموعه از حرکت‌ها بازیگر j که احتمال مثبتی با استفاده از باور μ_i^1 بازیگر i به حرکت‌های سایر بازیگران به غیر از i اختصاص می‌دهد که بر پایه انتخاب a_i توسط بازیگر i باشند تعبیر می‌گردد. برای هر $j \in N$ تعبیر X_j^2 مجموعه تمامی حرکت‌های a_j بازیگر j به طوری که حداقل یک حرکت $a_k \in X_k^1$ وجود داشته باشد که بازیگر مانند $k \neq j$ به واسطه باور $\mu_k^2(a_k)$ احتمال مثبتی به a_j اختصاص دهد.

به منظور مشاهده نتایج تعریف، تصور نمایید که سه بازیگر وجود دارد که هر یک دو حرکت ممکن دارند، A و B . فرض نمایید که حرکت A بازیگر اول توان عقلانی شدن دارد و باور μ_1^1 بازیگر اول در عقلانی کردن این حرکت از احتمال مثبت انتخاب یکی از (A, A) یا (B, B) توسط بازیگر دوم و سوم استفاده می‌کند. پس می‌توان نتیجه گرفت که $X_2^1 = X_3^1 = \{A, B\}$. باورهای $\mu_2^2(A)$ و $\mu_2^2(B)$ بازیگر دوم توجیه انتخاب حرکت A یا B بر پایه حرکت بازیگر اول و سوم مشخص می‌نماید؛ باور $\mu_3^2(A)$ و $\mu_3^2(B)$ بازیگر سوم نیز بر پایه حرکت بازیگر اول و دوم شکل می‌یابد. این چهار باور یکنسانی را در مورد بازیگر اول القا نمی‌کنند و احتمال [وقوع] مثبتی را به حرکت A نسبت نمی‌دهند. مجموعه X_1^2 متشکل از تمامی حرکت‌های بازیگر اول است که به وسیله $\mu_2^2(A)$ ، $\mu_2^2(B)$ ، $\mu_3^2(A)$ یا $\mu_3^2(B)$ احتمال مثبتی به آنها اختصاص داده شده است. این تعریف از توان عقلانی شدن معادل [تعریف] زیر خواهد بود.

■ تعریف ۲-۴ حرکت $a_i \in A_i$ در یک بازی استراتژیک $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ توان عقلانی شدن دارد اگر برای هر $j \in N$ مجموعه $Z_j \subseteq A_j$ به صورت زیر وجود داشته باشد

$$a_i \in Z_i \quad \bullet$$

• هر حرکت $a_j \in N$ بهترین پاسخ به باور $\mu_j(a_j)$ بازیگر j است که محملش زیر مجموعه Z_{-j} می‌باشد.

توجه داشته باشید اگر $(Z_j)_{j \in N}$ و $(Z'_j)_{j \in N}$ در این تعریف صدق نمایند آنگاه $(Z_j \cup Z'_j)_{j \in N}$ نیز در این تعریف صادق خواهد بود، از این رو مجموعه نماهای حرکت‌هایی که توان عقلانی شدن دارند برابر بزرگترین مجموعه $\times_{j \in N} Z_j$ خواهد بود که در آن $(Z_j)_{j \in N}$ در تعریف صدق خواهد کرد.

❖ لم ۱-۴ تعاریف ۱-۴ و ۲-۴ معادل یکدیگرند.

اثبات. اگر $a_i \in A_i$ بر اساس تعریف ۱-۴ توان عقلانی شدن داشته باشد آنگاه می‌توان $Z_i = \{a_i\} \cup (\cup_{t=1}^{\infty} X_i^t)$ و $Z_j = (\cup_{t=1}^{\infty} X_j^t)$ برای هر $j \in N \setminus \{i\}$ تعریف نمود. اگر این [حرکت] بر پایه تعریف ۲-۴ توان عقلانی شدن داشته باشد آنگاه می‌توان $\mu_i^1 = \mu_i(a_i)$ و $\mu_j^1(a_j) = \mu_j(a_j)$ برای هر $j \in N$ و هر عدد صحیح $t \geq 2$ تعریف نمود. در این صورت مجموعه X_j^t که در قسمت دوم و چهارم تعریف ۱-۴ تعریف گشته است زیر مجموعه Z_j بوده و در شرایط قسمت‌های اول و سوم آن نیز صدق می‌کند.

از تعریف ۲-۴ واضح است که در یک بازی متناهی هر حرکتی که بازیگر با احتمال مثبت در یک تعادل آمیخته نش استفاده می‌کند توان عقلانی شدن دارد (Z_j را محمل استراتژی‌های آمیخته نش بازیگر j بگیرید). نتیجه زیر نشان می‌دهد که این مساله برای حرکت‌های که با احتمال مثبتی در استراتژی‌های همبسته بکار گرفته می‌شوند نیز صحیح می‌باشد.

❖ لم ۲-۴ هر حرکتی که با احتمال مثبت توسط بازیگری در یک تعادل همبسته بازی متناهی استراتژیک به کار گرفته شود دارای توان عقلانی شدن می‌باشد.

اثبات. بازی استراتژیک $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ را در نظر آورید؛ یک تعادل همبسته را انتخاب نمایید، و Z_i را برای هر بازیگر $i \in N$ مجموعه حرکت‌هایی که بازیگر با احتمال مثبتی در تعادل انتخاب می‌نماید قرار می‌دهیم. بنابراین هر $a_i \in Z_i$ بهترین پاسخ به توزیع روی A_{-i} که به واسطه استراتژی‌های بازیگران به غیر از i

با فرض انتخاب حرکت a_i توسط او به وجود آمده است، خواهد بود. محمل این توزیع زیر مجموعه Z_{-i} بوده و از اینرو بر اساس تعریف ۲-۴ توان عقلانی شدن دارد.

در مساله معمای زندانیان (مثال ۲-۳) تنها تعادل نش حرکت/عتراف توان عقلانی شدن دارد. در تمامی بازی‌های دیگر بخش ۲-۳ هر دو حرکت بازیگران از این رو که با احتمال مثبتی در یک استراتژی آمیخته نش ممکن است مورد استفاده قرار به گیرند، توان عقلانی شدن خواهند داشت. به همین دلیل توان عقلانی شدن محدودیتی برای برآمد این بازی‌ها در پی ندارد. برای بسیاری از بازی‌های محدودیتی که توان عقلانی شدن ایجاد می‌گرداند ضعیف می‌باشد. در هر حال، در بعضی از بازی‌ها به مانند تمرین‌های زیر توان عقلانی شدن پاسخ دقیقی [در مورد برآمد بازی] در بر دارد.

✧ تمرین ۱-۴ مجموعه حرکت‌های که برای هر بازیگر در بازی دو نفره شکل ۴-۱ توان عقلانی شدن داشته باشد رو بیابید.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0, 7	2, 5	7, 0	0, 1
a_2	5, 2	3, 3	5, 2	0, 1
a_3	7, 0	2, 5	0, 7	0, 1
a_4	0, 0	0, -2	0, 0	10, -1

شکل ۴-۱ بازی دو نفره تمرین ۱-۴

✧ تمرین ۲-۴ (انحصار دوجانبه گزنت) بازی استراتژیک $\langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ که در آن $A_i = [0, 1]$ و $u_i(a_1, a_2) = a_i(1 - a_1 - a_2)$ برای هر $i = 1, 2$ است را در نظر بگیرید. نشان دهید تنها حرکتی هر بازیگر که توان عقلانی شدن دارد حرکت تعادل منحصر به فرد نش است.

✧ تمرین ۳-۴ (حدس زدن میانگین) در تمرین ۱-۳ نشان دهید حرکت تعادلی هر بازیگر حرکت منحصر به فردی است که توان عقلانی شدن دارد.

✧ تمرین ۴-۴ تصور نماید دو بازیگر مکانی را بین بازه صفر و یک انتخاب می‌نمایند؛ هر یک تمایل دارند که به دیگری نزدیک‌تر باشند، از اینرو بازه هر بازیگر $|a_1 - a_2|$ خواهد بود. نشان دهید هنگامی که مجموعه تعادل‌های نش بازی $\{(a_1, a_2) : a_1 = a_2\}$ است حرکت هر بازیگر توان عقلانی شدن دارد. حال فرض نماید به هر بازیگر فاصله‌اش از دیگری اطلاع داده می‌شود. تعریف ۲-۴ را با افزودن این شرط که محمل باوری که [بازیگر را] عقلانی می‌سازد جفت (a_i, d) متشکل از حرکت a_i و فاصله d که زیر مجموعه $\{a_j - d, a_j + d\}$ می‌باشد تغییر دهید. نشان دهید برای هیچ $d > 0$ حرکت a_i برای (a_i, d) توان عقلانی شدن دارد در حالت $(a_i, 0)$ هر a_i توان عقلانی شدن دارد.

توجه داشته باشید در تعاریف ۱-۴ و ۲-۴ باور بازیگر i را توزیع احتمال روی A_{-i} گرفته‌ایم، که این امکان را به هر بازیگر می‌دهد که باور داشته باشد حرکت‌های رقیبش همبسته می‌باشند. در اکثر ادبیات این موضوع، به بازیگران اجازه داشتن چنین باورهای داده نمی‌شود؛ که فرض شود باور هر بازیگر ضرب مستقل توزیع‌های احتمال هر یک برای بازیگران دیگر است. (در بازی‌های دو نفره به وضوح چنین فرض‌های بی‌اهمیت است.) این فرض با انگیزه مفهوم تعادل استراتژی آمیخته سازگار است. در تعریف عقلانی شدن که ما در این جا ارائه نمودیم ضروری است در تمامی سطوح بازیگر عقلانی باشد؛ تعریف دیگر که از عقلانی شدن می‌توان داشت این است که علاوه بر عقلانیت در تمامی سطوح باورها [بازیگران نیز] در هر سطح عقلانی شدن از یکدیگر مستقل باشند.

همان طور که شکل ۴-۲ نشان می‌دهد، این دو تعریف داری کارکردهای متفاوتی هستند. در این بازی سه بازیگر وجود دارند؛ بازیگر اول یکی از سطرها را انتخاب می‌کند، بازیگر دوم از میان ستون‌ها انتخاب خود را انجام می‌دهد، و بازیگر سوم یکی از چهار جدول را بر می‌گزیند. هر سه بازیگر بازده برابری دریافت می‌نمایند.

	L	R	L	R	L	R	L	R
U	8	0	4	0	0	0	3	3
D	0	0	0	4	0	8	3	3
	M_1		M_2		M_3		M_4	

شکل ۴-۲. بازی استراتژیک با سه بازیگر. بازیگر اول از میان سطرها انتخاب می‌کند و بازیگر دوم یکی از دو ستون را انتخاب می‌کند و بازیگر سوم از میان جدول‌ها انتخاب می‌کند. بازده افراد برابر یکدیگر بوده و مساوی مقدار مندرج در هر خانه از جدول می‌باشد.

می‌توانیم ادعا کنیم حرکت M_2 بر اساس تعاریف ۴-۱ و ۴-۲ در صورت باور بازیگر به این که حرکت رقبانش همبسته بوده توان عقلانی شدن دارد، اما در صورت اینکه باور بازیگران به صورت ضرب توزیع مستقل [احتمال] محدود شده باشند این حرکت توان عقلانی شدن ندارد. به منظور مشاهده این مطلب، توجه نماید حرکت U برای بازیگر اول بهترین پاسخ به باوری است که احتمال یک را به (L, M_2) و حرکت D هنگامی بهترین پاسخ است که احتمال باور (R, M_2) برابر یک تصور نماید؛ همچنین، هر دو حرکت بازیگر دوم بهترین پاسخ به باورهایی است که احتمال وقوع مثبتی را به U ، D و M_2 نسبت می‌دهد. از این گذشته، حرکت M_2 بازیگر سوم نیز بهترین پاسخ به به این باور است که بازیگران اول و دوم (U, L) و (D, R) با احتمال مساوی بازی می‌شوند. از اینرو، M_2 توان عقلانی شدن را در صورتی دارد که [باور بازیگر را] بدین صورت تعریف کرده باشیم (با قرار دادن $Z_1 = \{U, D\}$ ، $Z_2 = \{L, R\}$ و $Z_3 = \{M_2\}$ در تعریف ۴-۲). در هر حال، این حرکت بهترین پاسخ به هر جفت استراتژی آمیخته (مستقل) نیست و از اینرو بر اساس تعریف تغییر یافته‌ای که باور هر بازیگر به ضرب باورهای مستقل می‌باشند توان عقلانی شدن ندارند. (برای اینکه M_2 بهترین پاسخ باشد لازم است داشته باشیم $\max\{8pq, 8(1-p)(1-q)\} \geq 4pq + 4(1-p)(1-q)$ که در آن $(p, 1-p)$ و $(q, 1-q)$ به ترتیب استراتژی‌های آمیخته بازیگر اول و دوم باشند، چنین نامساوی برای هر مقدار p و q برقرار نخواهد گردید).

۴-۲ حذف متقابل حرکت‌های مطلقاً مغلوب

همانند مفهوم توان عقلانی شدن، مفهوم راه حلی را که مورد مطالعه قرار خواهیم داد بررسی بازی از دیدگاه یک بازیگر است. هر بازیگر حرکتی را انجام خواهد داد که نیازی به دانستن حرکت انتخابی دیگر بازیگران ندارد. به منظور تعریف این راه حل با حذف حرکت‌هایی که به طور قطع بازیگر نمی‌بایست انتخاب کنند می‌پردازیم. در یک بازی پیچیده فرض اینکه بازیگران در پی ساده سازی شرایطی که در پیش رویشان قرار دارد جالب توجه است. فرض می‌نماییم که بازیگران حرکت‌هایی که در مقابل هر حرکت/انتخابی سایر بازیگران بهترین پاسخ نمی‌باشد را کنار خواهند گذاشت. بازیگری که می‌داند سایر بازیگران عقلانی هستند می‌تواند تصور نمایند که دیگران نیز چنین حرکت‌های را حذف خواهند کرد. حال بازی G' که حاصل حذف چنین اعمالی از بازی G است را در نظر بگیرید. در این بازی نیز، بازیگری که می‌داند سایرین می‌دانند او عقلانی است می‌تواند ادعا نماید دیگران نیز حرکت‌هایی که هیچگاه بهترین پاسخ در G' نمی‌باشند را انتخاب نمی‌کنند. با ادامه این روند برآمد بازی

G می‌بایست بعد از تعداد نامشخصی از چنین چرخه حذف کردنی بدست آید. در اینجا این ایده را به صورت دقیق بیان نموده و نشان خواهیم داد این روند معادل مفهوم عقلانی سازی است.

۴-۲-۱ پاسخ های هیچگاه بهترین

■ تعریف ۳-۴ حرکتی از بازیگر i در بازی استراتژیک یک پاسخ هیچگاه بهترین می‌باشد اگر با فرض هر باور ممکن بازیگر i این حرکت بهترین پاسخ نباشد.

به وضوح هر حرکتی که پاسخ هیچگاه بهترین باشد توان عقلانی شدن ندارد. اگر حرکت a_i بازیگر i پاسخ هیچگاه بهترین باشد، آنگاه برای هر باور بازیگر i حرکتی که وابسته به آن باور بوده وجود دارد، که برای بازیگر i از حرکت a_i بهتر باشد. اکنون نشان خواهیم داد اگر a_i یک حرکت هیچگاه بهترین در یک بازی متناهی باشد آنگاه استراتژی آمیخته‌ای وجود خواهد داشت که با هر باوری که بازیگر i داشته باشد از a_i بهتر است. این مشخصه به طور دقیق در زیر تعریف شده است.

■ تعریف ۴-۴ حرکت $a_i \in A_i$ بازیگر i در بازی استراتژیک $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ مطلقاً مغلوب است اگر استراتژی آمیخته α_i برای بازیگر i به طوری که $U_i(a_{-i}, \alpha_i) > u_i(a_{-i}, a_i)$ باشد برای تمامی $a_{-i} \in A_{-i}$ وجود خواهد داشت، در این نامساوی $U_i(a_{-i}, \alpha_i)$ بازده بازیگر i بوده که استراتژی آمیخته α_i را انتخاب کرده و حرکت‌های دیگر بازیگران بردار a_{-i} است.

در واقع، نشان می‌دهیم که در یک بازی که مجموعه حرکت‌های بازیگران متناهی است حرکتی، پاسخ هیچگاه بهترین است که اگر و تنها اگر مطلقاً مغلوب باشد. از اینرو در چنین بازی‌هایی مفهوم مطلق غلبه [حرکت‌های بر یکدیگر] در قالب نظریه تصمیم خواهد بوده و شامل استراتژی‌های آمیخته نمی‌باشد. آنچه در زیر می‌آید نشان می‌دهد که حتی اگر ادعا شود استراتژی‌های آمیخته قابلیت مورد استفاده قرار گرفتن را در داشته باشند آنگاه بازیگر هیچگاه از حرکت مطلقاً مغلوب استفاده نمی‌کند.

❖ لم ۳-۴ حرکتی/از یک بازیگر در یک بازی/استراتژیک در صورتی پاسخ هیچگاه بهترین است/اگر و تنها اگر مطلقاً مغلوب باشد.

اثبات. بازی استراتژیک $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ را در نظر بگیرید و فرض نمایید $a_i^* \in A_i$ باشد. بازی کمکی مطلقاً رقابتی G' (تعریف ۲-۲ را بنگرید) را که در آن مجموعه حرکت‌های بازیگر اول $A_i / \{a_i^*\}$ و برای بازیگر دوم A_{-i} بوده، همچنین اولویت‌های بازیگر اول با تابع v_1 که به صورت $v_1(a_i, a_{-i}) = u_i(a_{-i}, a_i) - u_i(a_{-i}, a_i^*)$ (توجه نمایید که آرگمان (a_i, a_{-i}) از v_1 جفت حرکت‌های در G' است در حالی که (a_{-i}, a_i) و (a_{-i}, a_i^*) نمای حرکت در G می‌باشند) برای هر استراتژی آمیخته داده شده (m_1, m_2) در G مقدار بازده بازیگر اول را به صورت $v_1(a_i, a_{-i})$ نشان می‌دهیم.

حرکت a_i^* در G حرکت هیچگاه بهترین پاسخ خواهد بود اگر و تنها اگر هر استراتژی آمیخته بازیگر دوم در G' حرکتی برای بازیگر اول وجود داشته باشد که بازده مثبتی در پی داشته باشد؛ که در واقع، اگر و تنها اگر $\min_{m_2} \max_{a_2} v_1(a_i, m_2) > 0$. از اینرو (بر اساس خطی بودن v_1 در m_1) اگر و تنها اگر $\min_{m_2} \max_{m_2} v_1(m_1, m_2) > 0$.

حال، با استفاده از قضیه ۱-۳ بازی G' استراتژی نش آمیخته‌ای خواهد داشت، بنابراین با بکار بردن قسمت (ب) قضیه ۲-۲ در مورد فرم آمیخته توسعه یافته G' خواهیم داشت $\min_{m_2} \max_{m_2} v_1(m_1, m_2) > 0$ اگر و تنها اگر $\min_{m_2} \max_{m_2} v_1(m_1, m_2) > 0$ ؛ که معادل این گزاره است که، اگر و تنها اگر استراتژی آمیخته m_1^* بازیگر i در بازی G' برای تمامی m_2 ها $v_1(m_1^*, m_2) > 0$

(که شامل تمامی باورهای روی A_{-i} می‌باشد). از اینرو که m_1^* اندازه احتمالی بر $\{a_1^*\} \setminus A_i$ است استراتژی آمیخته بازیگر اول نیز در بازی G می‌باشد؛ شرط $v_1(m_1^*, m_2) > 0$ برای تمامی m_2 معادل $U_i(a_{-i}, m_1^*) - U(-a_{-i}, a_1^*) > 0$ برای تمامی $a_{-i} \in A_{-i}$ که معادل a_i^* بوده که مطلقاً مغلوب است. □
توجه داشته باشید دلایل مطرح گشته در این اثبات وابسته به فرض ما در مورد اولویت‌های بازیگران می‌باشد که برپایه لاتاری‌های گشته با فرضیات نیومن و مورگسترون باشد؛ در صورتی که اولویت‌ها در چهار چوب این فرضیات نباشند به طور کلی خواص [حرکت] هیچگاه بهترین پاسخ معادل حرکت مطلقاً مغلوب نمی‌باشد.

۲-۲-۴ حذف متقابل حرکت‌های مطلقاً مغلوب

- اکنون به تعریف دقیق رویه‌ای که در ابتدای این بخش به آن اشاره کردیم خواهیم پرداخت.
- تعریف ۵-۴ مجموعه $X \subseteq A$ از برآمدهای بازی استراتژیک متناهی $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ از فرآیند حذف متقابل استراتژی‌های مطلقاً مغلوب حاصل می‌گردد اگر $X = \times_{j \in N} X_j$ و گردایه $((X_j^t)_{j \in N})$ از مجموعه‌های که برای هر $j \in N$ دارای خواص زیر باشد وجود داشته باشند.
 - $X_j^T = A_j$ و $X_j^0 = A_j$
 - $X_j^{t+1} \subseteq X_j^t$ برای هر $t = 0, \dots, T-1$
 - برای هر $t = 0, \dots, T-1$ هر حرکت بازیگر j در $X_j^t \setminus X_j^{t+1}$ در بازی $\langle N, (X_i^t), (u_i^t) \rangle$ که u_i^t برای هر $i \in N$ تابع u_i محدود شده به $\times_{j \in N} X_j^t$ ، مطلقاً مغلوب می‌باشد.
 - هیچ حرکت X_j^T مطلقاً مغلوبی در بازی $\langle N, (X_i^T), (u_i^T) \rangle$ نخواهد بود.

♦ مثال ۱-۴ در بازی شکل ۳-۴ حرکت B مغلوب استراتژی آمیخته‌ای که در آن T و M هر یک با احتمال $\frac{1}{2}$ مورد استفاده قرار می‌گیرند می‌باشد. بعد از آنکه B از بازی حذف گشت، L مغلوب R خواهد گشت؛ هنگامی که L حذف شود T مغلوب M می‌گردد. بنابراین (M, R) تنها برآمد باقی مانده از حذف متقابل حرکت‌های مطلقاً مغلوب خواهد بود.

	L	R
T	3, 0	0, 1
M	0, 0	3, 1
B	1, 1	1, 0

شکل ۳-۴ یک بازی استراتژیک دو نفره. تنها حرکت M برای بازیگر اول و حرکت R برای بازیگر دوم توان عقلانی شدن دارد.

اکنون نشان خواهیم داد که در یک بازی متناهی مجموعه برآمدها که از [فرآیند] حذف متقابل حرکت‌های مطلقاً مغلوب باقی خواهند ماند وجود داشته و مجموعه نمای حرکت‌هایی است که توان عقلانی شدن داشته‌اند.

❖ قضیه ۱-۴ اگر $X = \times_{j \in N} X_j$ مجموعه باقی مانده از حذف متقابل حرکت‌های مطلقاً مغلوب در یک بازی متناهی $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ باشد آنگاه X_j مجموعه‌ای از حرکت‌های با توان عقلانی شدن برای هر بازیگر $j \in N$ می‌باشد.

اثبات. فرض کنید که $a_i \in A_i$ توان عقلانی شدن داشته باشد و $(Z_j)_{j \in N}$ به صورت نمای از مجموعه-های تعریف ۲-۴ به عنوان محمل a_i قرار دهید. برای هر مقدار t خواهیم داشت $Z_j \subseteq X_j^t$ از آنجا که هر

حرکت Z_j بهترین پاسخ به باوری روی Z_{-j} است و از آنرو که در بازی $\langle N, (X'_i), (u'_i) \rangle$ مطلقاً مغلوب نمی‌باشد (بر اساس لما ۳-۴) پس $a_i \in A_i$.

اکنون نشان می‌دهیم که برای هر $j \in N$ هر عضو X_j توان عقلانی شدن دارد. طبق تعریف، هیچ حرکت X_j در بازی که مجموعه حرکت‌های بازیگر i برابر X_i است مطلقاً مغلوب نیست، از اینرو بر اساس لما ۳-۴ هر حرکت در X_j بهترین پاسخ در میان اعضای X_j به باور روی X_{-j} می‌باشد. کفایت نشان دهیم که تمامی حرکت‌ها در X_j بهترین پاسخ در میان اعضای مجموعه A_j به باوری روی X_{-j} می‌باشد. اگر $a_j \in X_j$ بهترین پاسخ میان تمامی اعضای A_j نباشد آنگاه مقدار t به گونه‌ای که a_j بهترین پاسخ در میان اعضای X'_j به باور μ_j روی X_{-j} وجود خواهد داشت، اما بهترین پاسخ در میان اعضای X_{j-1}^{t-1} نخواهد بود. پس حرکت $b_j \in X_{j-1}^{t-1} \setminus X'_j$ که بهترین پاسخ در میان اعضای X_{j-1}^{t-1} به μ_j باشد، این ادعا با واقعیت اینکه b_j در مرحله t ام فرآیند حذف گشته در تناقض است. $\square$

یادآوری می‌گردد که در فرآیند تعریف ۵-۴ لازم نیست که کلیه استراتژی‌های مطلقاً مغلوب در هر مرحله حذف گردند. از اینرو، این نتیجه نشان می‌دهد که ترتیب و یا سرعت حذف کردن اثری بر مجموعه باقی مانده از این فرآیند ندارد.

لما ۳-۴، مفهوم معادل حذف متقابل حرکت‌های مطلقاً مغلوب و توان عقلانی سازی فاقد کارایی خواهند گردید اگر تعریف توان عقلانی سازی را به گونه‌ای تعبیر دهیم که بازیگران باور داشته باشند که لزوماً حرکت‌های رقبایشان مستقل [از یکدیگر] است. به منظور مشاهده این مطلب، بازی شکل ۲-۴ را در نظر آورید. حرکت M_2 بهترین پاسخ به باوری از بازیگر سوم بوده که بازیگران اول و دوم با احتمال مساوی (U, L) و (D, R) را بازی نمایند بدین دلیل این حرکت مطلقاً مغلوب نمی‌باشد. از طرف دیگر، همان طور که قبلاً مشاهده نمودیم، این حرکت بهترین پاسخ به هر جفت استراتژی (مستقل) آمیخته نیست و بدین دلیل [این حرکت] توان عقلانی شدن را تحت تعریف تعبیر یافته‌ای که باور هر بازیگر محدود به ضرب باورهای مستقل است را ندارد.

۳-۴ حذف متقابل حرکت‌های مغلوب ضعیف

حرکت از بازیگر را مغلوب ضعیف می‌نامیم اگر بازیگر حرکت دیگری حداقل به خوبی آن بدون در نظر گرفتن عمل دیگران و بهتر از آن با در نظر گرفتن برداری از حرکت‌های دیگران داشته باشد.

■ تعریف ۶-۴ حرکت $a_i \in A_i$ برای بازیگر i در بازی استراتژیک $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ مغلوب ضعیف است اگر استراتژی آمیخته α_i بازیگر i به گونه‌ای که $U_i(a_{-i}, \alpha_i) \geq u_i(a_{-i}, a_i)$ برای تمامی $a_{-i} \in A_{-i}$ و $U_i(a_{-i}, \alpha_i) > u_i(a_{-i}, a_i)$ برای بعضی از $a_{-i} \in A_{-i}$ ، که در آن $U_i(a_{-i}, \alpha_i)$ بازده بازیگر i هنگامی که استراتژی آمیخته α_i و دیگران a_{-i} را بازی می‌کنند، صادق باشد.

بر اساس لما ۳-۴ حرکتی که مغلوب ضعیف باشد اما مطلقاً مغلوب نباشد در بعضی از باورهای [بازیگر] بهترین پاسخ است. این واقعیت استدلال مطرح گشته علیه استفاده از حرکت‌های مغلوب ضعیف را در مقابل استفاده حرکت‌ها مطلقاً مغلوب را تضعیف می‌نماید. با این وجود از آنرو که مزیتی در استفاده از حرکت‌های مغلوب ضعیف وجود ندارد، به نظر طبیعی می‌رسد که چنین حرکت‌هایی را در فرآیند ساده سازی یک بازی پیچیده حذف نماییم.

مفهوم مغلوب ضعیف بودن همانند به فرایندی است که در مورد حذف متقابل استراتژی‌های مطلقاً مغلوب عنوان نموده‌ایم (تعریف ۵-۴). با این تفاوت که این فرآیند ممکن است وابسته به ترتیب حذف حرکت‌ها بستگی داشته باش، این مساله را می‌توانید در شکل ۳-۴ ببینید. در صورتی که در ابتدا T را حذف نماییم (T مغلوب ضعیف M است) و سپس L را (L مغلوب ضعیف R می‌باشد) که به برآمدی که در آن بازیگر دوم R را

انتخاب نموده و بازده بازی برابر $(2,1)$ منجر خواهد شد. از طرف دیگر در صورتی که اگر ابتدا B را حذف نماییم (B مغلوب ضعیف M است) و سپس R را (R مغلوب ضعیف L می‌باشد) بازیگر دوم L را انتخاب نموده و بازده برآمد بازی برابر $(1,1)$ خواهد شد. توضیح بیشتر در مورد فرآیند حذف متقابل حرکت‌های مغلوب ضعیف در بخش ۶-۶ آورده شده است.

✧ تمرین ۴-۵ نوع دیگر از بازی مطرح گشته در مثال ۲-۳ را در نظر بگیرید که در آن دو بازیگر وجود داشته، توزیع موقعیت‌های مطلوب شهروندان نیز یکنواخت بوده و هر بازیگر محدود به انتخاب موقعیت خود l/m برای $l \in \{0, \dots, m\}$ وقتی که m زوج است می‌باشد. نشان دهید که تنها برآمد باقی مانده حاصل از حذف حرکت-های مغلوب ضعیف وقتی است که هر دو بازیگر موقعیت $\frac{1}{2}$ را انتخاب نمایند.

✧ تمرین ۴-۶ (چیره حل پذیر) یک بازی استراتژیک چیره حل پذیر است در صورتی که تمامی بازیگران نسبت به تمامی برآمدهای باقی مانده از فرآیند حذف متقابل حرکت‌های مغلوب بی تفاوت بوده که در آن تمامی حرکت‌های مغلوب ضعیف هر بازیگر در هر مرحله حذف گردیده‌اند. مثالی از یک بازی استراتژیک بیاورید که چیره حل پذیر بوده اما بازیگران در میان تمامی برآمدهای باقی مانده از فرایند حذف متقابل استراتژی‌های مغلوب ضعیف بی تفاوت نباشند (در این روند تمامی حرکت‌های مغلوب ضعیف ممکن است در هر مرحله حذف نگردد).

✧ تمرین ۴-۷ هر یک از دو بازیگر عدد طبیعی مثبتی که حداکثر صد می‌تواند باشد را اعلام می‌نمایند. اگر $a_1 + a_2 \leq 100$ ، که در آن a_i عددی اعلام شده توسط بازیگر i است، آنگاه هر بازیگر i بازدهی به اندازه a_i دریافت می‌نمایند. اگر $a_1 + a_2 > 100$ و $a_i < a_j$ باشد آنگاه بازیگر i بازده a_i را دریافت نموده و بازده بازیگر j برابر $100 - a_i$ خواهد بود؛ و اگر $a_1 + a_2 > 100$ و $a_i = a_j$ هر یک از آنها بازده برابر 50 را دریافت می‌نمایند. نشان دهید که این بازی چیره حل پذیر است (به تمرین قبل مراجعه نمایید) و مجموعه برآمدهای باقی مانده آن را بدست آورید.

لما ۴-۳ نشان می‌دهد که در یک بازی متناهی حرکتی که مطلقاً مغلوب نباشد بهترین پاسخ به باوری می‌تواند باشد. تمرین‌های زیر این نتیجه برای حرکت‌هایی (یا استراتژی آمیخته‌ای) که مغلوب ضعیف نیستند تقویت خواهند نمود.

✧ تمرین ۴-۸ نشان دهید در یک بازی استراتژیک متناهی هر استراتژی آمیخته بازیگر که مغلوب ضعیف نباشد بهترین پاسخ باوری است که احتمال مثبتی را به هر بردار از حرکت‌های دیگر بازیگران اختصاص می‌دهد. (راهنمایی: بازی استراتژیک $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ و مجموعه U از تمامی بردارهای به صورت $(u_1(a_{-1}^1, m_1), \dots, u_1(a_{-1}^k, m_1))$ را که محدوده m_1 روی استراتژی‌های آمیخته بازیگر اول و $\{a_{-1}^1, \dots, a_{-1}^k\}$ مجموعه حرکت‌ها سایر بازیگران به غیر از بازیگر اول می‌باشد را در نظر بگیرید. با قرار دادن $u^* \in U$ به صورت استراتژی آمیخته‌ای که بازیگر اول که مغلوب ضعیف نیست، لازم است نشان دهید بردار مثبت p^* که $p^*.u^* > p^*.u$ برای تمامی $u \in U$ وجود دارد. برای این منظور، بدون از دست رفتن کلیت مساله کافیت $u^* = 0$ قرار داده و برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه‌ای به صورت

$$P(\varepsilon) = \{p \in \square^k : p_i > \varepsilon \text{ for All } i \text{ and } \sum_{i=1}^k p_i = 1\}$$
 تعریف نمایید. از نتیجه تمرین ۳-۵ برای

مجموعه‌های $P(\varepsilon)$ و U هنگامی که $\varepsilon \rightarrow 0$ استفاده نمایید، همچنین از این واقعیت که U پوسته‌ای محدبی از تعداد متناهی بردار می‌باشد استفاده نمایید.)

یادداشت ها

مفهوم توان عقلانی سازی ریشه در کارهای بیرنهم (۱۹۸۴)^۱ و پیرس (۱۹۸۴)^۲ دارد (هر دو بازیگران محدود به باوری نموده اند که حرکتها سایرین مستقل می باشد). (سپاهن (۱۹۸۲)^۳ این ایده رو مطرح نموده ولی آن را به طور مدون بیان ننموده است). انواع رویه حذف متقابل استراتژی های مغلوب در ابتدا توسط گیل (۱۹۵۳)^۴ و لوئیس و رایفا (۱۹۵۷، صفحات ۱۰۸-۱۰۹ و ۱۷۳)^۵ به تفصیل مورد مطالعه قرار گرفته است؛ صورتبندی که در انجا ارائه نمودیم بر اساس موئلین (۱۹۷۳)^۶ می باشد. لما ۳-۴ بر اساس پیرس (۱۹۸۴)^۷؛ که بسیار شبیه به لما ۱-۲-۳ و ن دم (۱۹۸۴)^۸ می باشد. قضیه ۱-۴ بر اساس پیرس (۱۹۸۴، صفحه ۱۰۳۵)^۹ می باشد.

نتیجه تمرین ۲-۴ از گابای و موئلین (۱۹۸۰)، بیرنهم (۱۹۸۴)^{۱۰} و موئلین (۱۹۸۴)^{۱۱} برگرفته شده است. تمرین ۴-۴ بر اساس روبنشتاین و ولیسکی (۱۹۹۴)^{۱۲} می باشد. مفهوم چیره حل پذیر که در تمرین ۴-۶ مطرح گردید بر اساس موئلین (۱۹۷۹)^{۱۳} است؛ که بسیار به مفهوم حل پذیری در صورت کامل ضعیف در لوئیس و رایفا (۱۹۵۷، صفحه ۱۰۹)^{۱۴} نزدیک می باشد. تمرین ۷-۴ برگرفته از برامس و تیلور (۱۹۹۴) و تمرین ۸-۴ بر اساس ارو، بارانکین و بلکول (۱۹۵۳) است.

برای مطالعه در مورد خانواده ای از بازی ها که توان عقلانی پذیری جواب دقیقی ارائه می نماید به ویوایز (۱۹۹۰)^{۱۵} و میلگرام و رابرتس (۱۹۹۰)^{۱۶} بنگرید.

^۱ Bernheim (۱۹۸۴)

^۲ Pearce (۱۹۸۴)

^۳ Spohn (۱۹۸۲)

^۴ Gale (۱۹۵۳)

^۵ Luce and Raiffa (۱۹۵۷)

^۶ Moulin (۱۹۷۳)

^۷ Pearce (۱۹۸۴)

^۸ Van Damme (۱۹۸۳)

^۹ Pearce (۱۹۸۴)

^{۱۰} Bernheim (۱۹۸۴)

^{۱۱} Moulin (۱۹۸۴)

^{۱۲} Rubinstein and Wolinsky (۱۹۹۴)

^{۱۳} Moulin (۱۹۷۹)

^{۱۴} Luce and Raiffa (۱۹۵۷)

^{۱۵} Vives (۱۹۹۰)

^{۱۶} Milgrom and Roberts (۱۹۹۰)