۳ تعادل های آمیخته، همبسته و تکاملی

در این فصل دو مفهوم تعادل که در آنها حرکت‌های بازیگران قطعی[۱] نیستند مورد بررسی قرار داده‌ایم: تعادل استراتژی آمیخته نَش[۲] و تعادل همبسته[۳]. همچنین گونه‌ای از تعادل نَش که برای مدل سازی برآمد یک فرآیند تکاملی طراحی گشته را نیز به طور خلاصه مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۳-۱ تعادل استراتژی آمیخته نَش

۳-۱-۱ تعاریف

مفهوم تعادل استراتژی آمیخته نَش به منظور مدل‌سازی فضای حالت یک بازی که در آن انتخاب‌های شرکت کنندگان غیر قطعی بوده اما از یک قانون احتمالی پیروی می‌نمایند، طراحی گردیده است. در ابتدا تعاریف صوری [این مفهوم] را ارائه نموده و سپس به تفسیر آن خواهیم پرداخت.

در فصل گذشته بازی استراتژیک را با استفاده از سه متغیر $\langle N,(A_i),(\succsim_i)\rangle$، که در آن رابطه اولویت $\succsim_i$ برای هر بازیگر i بر روی مجموعه $A=\times_{i\in N}A_i$ بود را تعریف نمودیم (تعریف ۲-۱). در این بخش از آنجا که به بازیگر اجازه داده‌ایم که انتخاب‌هایش غیر قطعی نیز باشد نیازمندیم که به اصل مدل مذبور این مشخصه پایه را که رابطه اولویت بازیگر بر روی *لاتاری‌ها* می‌باشد را نیز اضافه نماییم. پر پایه سنت متداول در نظریه بازی‌ها، فرض می‌نماییم که رابطه اولویت هر بازیگر i در فرضیات فُن‌نیومن و مُورگِسترون صدق می‌نماید، از اینرو می-توان [رابطه اولویت را] با استفاده از مقدار انتظاری تابعی به صورت $u_i:A\to\mathbb{R}$ نمایش داد. بنابراین مدل ساده برهم‌کنش استراتژیک ما در این فصل به صورت سه گانه $\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ که تفاوت ماهوی با بازی استراتژیک دارد در خواهد آمد، همان طور که قبلا تعریف گردید $u_i:A\to\mathbb{R}$ برای هر $i\in N$ تابعی است که بیانگر

---

[۱] deterministic

[۲] Mixed strategy Nash equilibrium

[۳] Correlated equilibrium

مقدار انتظاری اولویت بازیگر i بر روی مجموعه *لاتاری‌ها* در A می‌باشد. با این وجود، به این مدل نیز به [منظور] ساده‌گی **بازی استراتژیک** می‌گوییم.

فرض کنید که $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ چنین بازی استراتژیکی باشد. مجموعه توزیع‌های احتمال روی A_i به صورت $\Delta(A_i)$ نشان می‌دهیم و به اعضای $\Delta(A_i)$ **استراتژی آمیخته** بازیگر i خواهیم گفت؛ فرض می‌نمایم که استراتژی‌های آمیخته بازیگر، مستقلِ تصادفی‌گونه باشد. به منظور آشکار سازی این تمایز، اعضای A_i را **استراتژی خالص**[۱] می‌نمامیم. برای هر مجموعه متناهی X و $\delta\in\Delta(X)$ نماد $\delta(x)$ احتمالی است که δ به $x\in X$ تخصیص میدهد و *محمل*[۲] δ را طوری تعریف می‌نماییم که مجموعه اجزای $x\in X$ به صورت $\delta(x)>0$ باشد. نمای $(\alpha_j)_{j\in N}$ از استراتژی‌های آمیخته حاوی توزیع احتمال روی مجموعه A خواهد بود؛ برای مثال، اگر هر A_j متناهی باشد آنگاه بر اساس [فرض] استقلال تصادفی‌گونه، احتمال نمای حرکت $a=(a_j)_{j\in N}$ برابر $\prod_{j\in N}\alpha_j(a_j)$ خواهد بود. بدین طریق ارزیابی بازیگر i از $(\alpha_j)_{j\in N}$ برابر $\sum_{a\in A}(\prod_{j\in N}\alpha_j(a_j))u_i(a)$ می‌باشد.

حال می‌توان از بازی G بازی استراتژیک دیگری را استخراج نمود که" آمیخته توسعه یافته[۳]" G نامیده می‌شود؛ در این بازی حرکت‌های هر بازیگر i مجموعه $\Delta(A_i)$ از استراتژی‌های آمیخته موجود در G خواهد بود.

- تعریف ۳-۱ فرم **آمیخته توسعه یافته** بازی استراتژیک $\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ به صورت $\langle N,(\Delta(A_i)),(u_i)\rangle$ نمایش داده می‌شود، که در آن $\Delta(A_i)$ مجموعه توزیع‌های احتمال روی A_i است. همچنین $U_i:\times_{j\in N}\Delta(A_i)\to\mathbb{R}$ به هر $\alpha\in\times_{j\in N}\Delta(A_i)$ تحت u_i از لاتاری‌های روی A یک مقدار انتظاری اختصاص می‌دهد که توسط α القا[۴] گشته است (از اینرو اگر A متناهی باشد آنگاه $U_i(\alpha)=\sum_{a\in A}(\prod_{j\in N}\alpha_j(\alpha_i))u_i(a)$).

توجه داشته باشید که تابع U_i یک تابع چند خطی[۵] است. به این معنی که، برای هر نمای استراتژی آمیخته α، هر استراتژی آمیخته β_i و γ_i برای بازیگر i و هر عدد $\lambda\in[0,1]$ خواهیم داشت $U_i(\alpha_{-i},\lambda\beta_i+(1-\lambda)\gamma_i)=\lambda U_i(\alpha_{-i},\beta_i)+(1-\lambda)U_i(\alpha_{-i},\gamma_i)$. همچنین وقتی هر A_i متناهی باشد خواهیم داشت

$$U_i(\alpha)=\sum_{a\in A_i}\alpha_i(a_i)U_i(\alpha_{-i},e(a_i)) \tag{۳-۱}$$

برای هر نمای استراتژی α، $e(a_i)$ استراتژی آمیخته تباهیدهٔ بازیگر i خواهد بود که احتمال یک را به $a_i\in A_i$ نسبت دهد.

اکنون اصلی‌ترین مفهوم تعادل را که در این فصل مطالعه خواهیم نمود را تعریف می‌نماییم.

- تعریف ۳-۲ **تعادل استراتژی آمیخته نَش یک بازی استراتژیک** تعادل نَش [بازی] آمیخته توسعه یافتهٔ آن خواهد بود.

---

[۱] Pure strategy

[۲] Support - در واقع محمل معادل مجموعه $Supp(\alpha_i)=\{a_i\in A:\alpha_i(a_i)>0\}$ می باشد. [مترجم]

[۳] Mixed extension

[۴] induced

[۵] multilinear

تصور نمایید که $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ یک تعادل استراتژی آمیخته نَش $\alpha^*\in\times_{j\in N}\Delta(A_j)$ باشد، هر استراتژی آمیخته بازیگر i تباهیده است به طوری که احتمال [وقوع] یک را به یک عضو A_i، مثل a_i^*، تخصیص می‌دهد. سپس، از آنجا که می‌توان A_i را با استفاده زیر مجموعه $\Delta(A_i)$ شناخت، نمای حرکت a^* تعادل نَش بازی G خواهد بود. به طور عکس، تصور نماید که a^* یک تعادل نَش بازی G باشد. سپس، بر اساس خطی بودن U_i در α_i هیچ توزیع احتمالی بر روی حرکت‌ها در A_i وجود نخواهد داشت که نتیجه‌ای بهتر از آنچه $e(a_i)$ برای بازیگر i به وجود می‌آورد بدهد، بدین طریق نمای $(e(a_i))$ تعادل استراتژی آمیخته نَش G خواهد بود.

در اینجا تنها این نکته را عنوان نمودیم که مجموعه تعادل‌های نَش یک بازی استراتژیک زیر مجموعه مجموعه تعادل‌های استراتژی آمیخته نَش آن است. در فصل دوم دیدیم که بازی‌های وجود دارد که مجموعه تعادل‌های نَش آن تهی می‌باشد. همچنین بازی‌های نیز وجود دارد که مجموعه تعادل‌های استراتژی آمیخته نَش آن نیز تهی است. با این وجود، نتیجه زیر نشان می‌دهد که در هر بازیی که بازیگران تعداد متناهی و زیادی حرکت داشته باشد حداقل یک تعادل استراتژی آمیخته نَش وجود خواهد داشت.

❖ قضیه ۳-۱ *هر بازی استراتژیک متناهی تعادل استراتژیک آمیخته نَش دارد.*

اثبات. فرض کنید $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ یک بازی استراتژیک باشد که برای هر بازیگر i تعداد اعضای مجموعه A_i برابر m_i باشد. سپس می‌توانیم مجموعه استراتژی‌های آمیخته بازیگر i را با مجموعه بردارهای $(p_1,\dots,p_{m_i})$ که در آن $p_k>0$ برای تمامی kها و $\sum_{k=1}^{m_i}p_k=1$ نشان داد (p_k احتمال استفاده بازیگر i از kامین استراتژی خالصش است). این مجموعه ناتهی، محدب و فشرده است. از آنجا که بازده انتظاری روی احتمالات خطی است، تابع بازده هر بازیگر در فرم آمیخته توسعه یافته G هم در استراتژی‌های خودش شبه محدب و هم پیوسته است. بدین طریق فرم آمیخته توسعه یافته G تمامی شروط قضیه ۲-۱ را دارد.

نکته اساسی در این اثبات متناهی فرض نمودن مجموعه حرکت‌های هر بازیگر می‌باشد. گلِکسبرگ (۱۹۵۲)[۱] نشان می‌دهد که هر بازیی که هر مجموعه حرکت زیر مجموعه محدب و فشرده فضای اقلیدوسی بوده و هر تابع بازده نیز پیوسته باشد آنگاه بازی تعادل استراتژی آمیخته نَش دارد. (اگر تابع بازده هر بازیگر به صورت شبه مقعر در حرکت خودش نیز باشد آنگاه قضیه ۲-۱ نشان می‌دهد که چنین بازیی دارای استراتژی نَش خالص خواهد بود.)

نتیجه زیر مشخصه مهمی از تعادل‌های استراتژی آمیخته نَش را که در محاسبه این تعادل‌ها سودمند است را ارائه می‌نماید.

❖ لم ۳-۱ *فرض کنید* $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ *یک بازی متناهی استراتژیک باشد. آنگاه* $\alpha^*\in\times_{j\in N}\Delta(A_j)$ *تعادل استراتژی آمیخته نَش بازی* G *است اگر و تنها اگر برای هر بازیگر* $i\in N$ *در محمل* α_i^* *بهترین پاسخ به* α_{-i}^* *باشد.*

اثبات. ابتدا تصور نمایید که حرکت a_i در محمل α_i^* وجود دارد که بهترین پاسخ به α_{-i}^* نیست. پس با بهره از خاصیت خطی بودن U_i در α_i (تعریف ۳-۱ را ببینید) بازیگر i می‌تواند با انتقال احتمال از a_i به حرکتی که بهترین پاسخ*است* بازده‌اش را بهبود بخشد؛ لذا α_i^* بهترین پاسخ به α_{-i}^* نیست.

حال تصور کنید که استراتژی آمیخته α_i' وجود دارد که بازده انتظاری بیشتری از α_i^* در پاسخ به α_{-i}^* می‌دهد. با استفاده دوباره از خطی بودن U_i حداقل یک حرکت در محمل α_i' می‌بایست بازده بیشتری از حرکت‌های محمل α_i^* بدهد، به این دلیل تمامی حرکت‌های در محمل α_i^* بهترین پاسخ به α_{-i}^* نیستند.

---
[۱] Glicksberg (1952)

این لم حاوی این مطلب است که هر حرکتی در محمل تعادل استرتژی آمیخته هر یک بازیگران نتیجه بازده یکسانی را برای بازیگر دارد.

اگر مجموعه حرکت‌های تعدادی از بازیگران متناهی نباشد نتایج بدست آمده نیاز به بازنگری خواهد داشت. در این صورت، α^* یک تعادل استراتژی آمیخته نَش است اگر و تنها اگر (الف) برای هر بازیگر i هیچ عملی در A_i نباشد که ،با فرض α^*_{-i}، نتیجه‌ای بهتر از بازده تعادل بازیگر i ایجاد گرداند، و (ب) با فرض α^*_{-i}، مجموعه حرکت‌هایی که بازدهی کمتر از بازده تعادل بازیگر بدست می‌دهند دارای α^*_i-صفر اندازه می‌باشند.

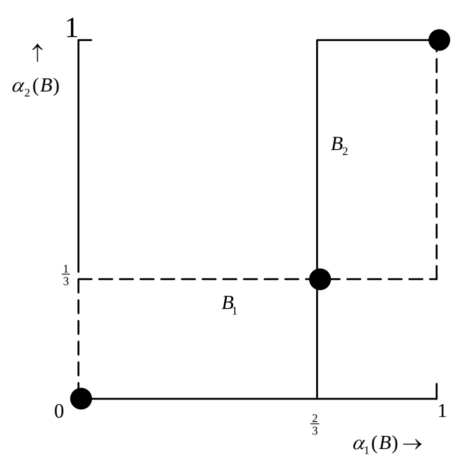
لازم به یادآوری است فرض اینکه اولویت‌های بازیگران را می‌توان با بازده انتظاری آنها نشان داد نقش کلیدی در مشخصات تعادل استراتژی آمیخته بازی می‌نماید. نتایج بدست آمده لزوماً تحت دیگر نظریه‌های تصمیم‌گیری در حالت عدم قطعیت صادق نخواهند بود.

۳-۱-۲ *چند مثال*

در زیر نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان تعادل استراتژی آمیخته نَش را در بازی‌های متناهی یافت.

◆ مثال ۳-۱ (*باخ یا استراوینسکی*) بازیی را به صورت بازی BoS در نظر آورید، که در جدول ۳-۱ آورده شده است. در فصل دوم تعبیر بازده هر بازیگر i در این جدول به مثابه اولویت‌های بازیگر i روی مجموعه (خالص) برآمدها بود. در اینجا، از آنرو که علاقمند مطالعه تعادل استراتژی آمیخته هستیم، بازده‌های این جدول را به صورت مطلوبیت فُن‌نیومن-مُورگِسترون تعبیر خواهیم نمود.

	Bach	*Stravinsky*
Bach	2,1	0,0
Stravinsky	0,0	1,2



شکل ۳-۱ بازی استراتژیک BoS (بالا) و تابع بهترین پاسخ فرم آمیخته توسعه یافته این بازی (پایین). تابع بهترین پاسخ بازیگر اول با خط چین نشان داده شده ؛ تابع بهترین پاسخ بازیگر دوم نیز با خط تو پر نمایش داده شده است. نقاط توپر سیاه نیز دو تعادل خالص نَش و یک تعادل استراتژی آمیخته نَش را نشان می‌دهند.

همان طور که قبلاً ذکر گشت بازی دو تعادل نَش (خالص) (B,B) و (S,S) دارد، که $S=Stravinsky$ و $B=Bach$ است. تصور نماید که (α_1,α_2) تعادل استراتژی آمیخته نَش بازی باشد. اگر $\alpha_1(B)$ صفر و یا یک باشد، دو تعادل نَش خالص خواهیم داشت. اگر $0<\alpha_1(B)<1$ آنگاه، با فرض α_2 داده شده، با استفاده از لم ۳-۱ بازده بازیگر اول برای حرکت‌های B و S می‌بایست با یکدیگر برابر گردیده از این رو خواهیم داشت $2\alpha_2(B)=\alpha_2(S)$ پس در این صورت $\alpha_2=\frac{1}{3}$ می‌باشد. از آنجا که $0<\alpha_2(B)<1$ به همان صورت بازیگر دوم نیز بازدهی برابر بین دو حرکت B و S می‌بایست داشته باشد، بدین طریق $\alpha_1(B)=\alpha_2(S)$ یا $\alpha_1(B)=\frac{1}{3}$ خواهد گشت. بنابراین تنها تعادل استراتژی آمیخته نَش غیر تباهیده این بازی $\left((\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\right)$ است.

مطلب بالا نشانگر چگونگی ساختن تابع بهترین پاسخ بازیگران در فرم آمیخته توسعه یافتهٔ این بازی می‌باشد. اگر $0\le\alpha_2<\frac{1}{3}$ آنگاه بهترین پاسخ یکتای بازیگر اول α_1 برابر $\alpha_1(B)=0$ خواهد گشت؛ اگر $\frac{1}{3}<\alpha_2(B)\le 1$ آنگاه بهترین پاسخ یکتا $\alpha_1=\frac{1}{3}$ خواهد بود؛ و اگر $\alpha_2=\frac{2}{3}$ خواهیم دید که *تمامی* استراتژی‌های آمیخته بهترین پاسخ هستند. با انجام چنین محاسباتی برای بازیگر دوم به تابعی که در قسمت پایین شکل ۳-۱ نشان داده شده خواهیم رسید.

✧ تمرین ۳-۱ (*حدس زدن میانگین*) هر یک از n نفر عددی را از مجموعه $\{1,\dots,K\}$ اعلام می‌نمایند. یک جایزه یک دلاری به تساوی بین کسانی که نزدیک‌ترین عدد را به $\frac{2}{3}$ میانگین اعداد انتخاب کرده‌اند تقسیم خواهد گشت. نشان دهید که بازی تعادل استراتژی آمیخته نَش یکتا دارد که در آن استراتژی هر باریگر خالص است.

✧ تمرین ۳-۲ (*رقابت در سرمایه گذاری*) دو سرمایه‌گذار بر سر یک جایزه یک دلاری رقابت می‌نمایند. هر یک می تواند مبلغی در بازه $[0,1]$ را هزینه نمایند. برنده سرمایه‌گذاری کسی است که بیشتر هزینه نموده باشد؛ در حالتی که آنها به تساوی هزینه کرده باشند جایزه به تساوی میانشان تقسیم می‌گردد. این شرایط را به صورت یک بازی استراتژیک بیان نمایید و تعادل استراتژی آمیخته نَش آن را بیابید. (لازم به ذکر است تابع بازدهی بازیگران گسته است، از اینرو نمی‌توان نتیجه گِلِکسبرگ را به کار بست؛ با این وجود بازی دارای تعادل استراتژی آمیخته نَش است.)

در بخش ۲-۵ دسته بازی‌های اکیداً رقابتی را تعریف و مطالعه نمودیم. نشان داده شد (قضیه ۲-۲) در هر بازی استراتژیک اکیداً رقابتی که تعادل نَش دارد مجموعه تعادل‌ها همان مجموعه جفت‌های ماکسیمین کنندهٔ بازی می‌باشد. از این واقعیت می‌توان در یافتن تعادل استراتژی آمیخته نَش بازی‌هایی که فرم آمیخته توسعه یافتهٔ آن اکیداً رقابتی است استفاده نمود. (لازم به ذکر است که در بازی اکیداً رقابتی لازماً فرم آمیخته توسعه یافته آن اکیداً رقابتی نخواهد بود. به منظور مشاهده این مطلب، بازیی را در نظر بگیرید که برآمدهای آن a^1، a^2 و a^3 باشد. حال [اولویت‌های بازیگران] ممکن است به صورت $a^1\succ a^2\succ a^3$ و $a^3\succ a^2\succ a^1$ بوده، در نتیجه بازی اکیداً رقابتی می‌باشد، در حالی که اگر هر *دو* بازیگر a^2 را بر لاتاری‌های که با احتمال مساوی روی a^1 و a^3 اتفاق می‌افتد ترجیح دهند آنگاه دیگر فرم آمیخته توسعه یافتهٔ بازی دیگر اکیداً رقابتی نخواهند بود.)

✧ تمرین ۳-۳ (*حدس زدن صحیح*) دو بازیگر از مجموعه $\{1,\dots,K\}$ هر یک عددی انتخاب می‌نمایند. اگر بازیگران عددی یکسان را انتخاب نمایند بازیگر دوم یک دلار به دیگری پرداخت خواهد کرد؛ در غیر این صورت هیچ پرداختی صورت نخواهد گرفت. هر یک از بازیگران بازده انتظاری پولیشان را بیشینه می‌نمایند. تعادل‌های استراتژی آمیخته این بازی (اکیداً رقابتی) را بیابید.

✧ تمرین ۳-۴ (*حمله هوایی*) ارتش A تنها یک هواپیما برای حمله به یکی از سه هدف ممکن حریف در اختیار دارد. ارتش B نیز تنها یک دستگاه سیستم پدافند هوایی که از یکی از اهداف می‌تواند محافظت کند در اختیار دارد. ارزش هدف k برابر v_k است، که به ترتیب $v_1>v_2>v_3$ می‌باشد. ارتش A زمانی می‌تواند

هدفی را به طور کامل نابود نماید که حمله به هدف مزبور با پدافند حریف روبرو نگردد. هدف ارتش A بیشینه سازی خسارت و هدف ارتش B کاهش آن است. این شرایط را به صورت یک بازی (اکیداً رقابتی) استراتژیک بیان نموده و تعادل‌های استراتژی آمیخته نَش آن را بیابید.

✧ تمرین ۳-۵ نتیجه ریاضی زیر را که در تمرین ۶۴,۲ استفاده خواهیم کرد را بررسی نمایید. برای هر دو زیر مجموعه فشرده محدب X و Y از $\mathbb{R}^k$، دو عضو $x^* \in X$ و $y^* \in Y$ وجود خواهد داشت بطوری که نامساوی $x^*.\, y \leq x^*.\, y^* \leq x\,.\, y^*$ برای تمامی $x \in X$ و $y \in Y$ صادق باشد. (می‌توانید این نتیجه را با بهره‌گیری از وجود تعادل نَش در یک بازی استراتژیک (قضیه ۲-۱) و یا استدلال ساده زیر (که به طور مستقیم از قضیه نقطه ثابت کاکوتانی استفاده نمی‌کند) اثبات نمود. با قراردادن (x^n) و (y^n) به صورت دو سریی که به ترتیب در x و y، و در نظر گرفتن بازی اکیداً رقابتی برای هر عدد صحیح مثبت n که در آن هر بازیگر n حرکت و تابع بازده بازیگر اول با استفاده از $u_1(i, j) = x^i.\, y^i$ تعیین می‌گردد و همچنین به بکاربردن قضیه-های ۳-۱ و ۲-۲ اثبات نمود.)

۲-۳ تعابیر تعادل استراتژی آمیخته

در این بخش به بررسی تعدادی از تعابیر مختلف از [مفهوم] تعادل استراتژی آمیخته خواهیم پرداخت. ما [مولفان] در بعضی از موارد با یکدیگر هم عقیده نبودیم؛ از اینرو با بکاربردن حروف اول اسم در ابتدای پاراگراف-های که تنها در بر گیرنده نظرات یکی از ما بوده آنرا مشخص نموده‌ایم.

۳-۲-۱ *استراتژی آمیخته به صورت اهداف انتخاب*

واضح است که استراتژی آمیخته [مفهومی است که] به طور سنجیده تصمیم گیری تصادفی را به رفتار بازیگر می‌افزاید: بازیگری که استراتژی آمیخته را انتخاب می‌کند، خود را مقید به استفاده ابزاری تصادفی می-گرداند که به صورت احتمالاتی حرکت‌های را از مجموعه حرکت‌های بازیگر انتخاب می‌کند. هنگامی که تمامی بازیگران خود را مقید [به کاربردن آن] نموده این ابزار عملیاتی گردیده و نمای حرکت [آمیخته] به وجود خواهد آمد. بدین طریق هر بازیگر i [حرکت‌های خود را] از میان اعضای (ΔA_i) به همان صورتی که در فصل دوم در مورد انتخاب از میان اعضای A_i توضیح داده شد انتخاب می‌نماید.

مواردی [در جهان واقع] به طور قطع وجود دارد که بازیگران در رفتار خود ماهیتی تصادفی گونه را ایجاد می‌کنند. برای مثال، بازیگران به طور تصادفی در بازی پُکِر" بلوف " می‌زنند، دولت‌ها به طور تصادفی بعضی از مالیات دهندگان را حسابرسی نموده و یا در بعضی فروشگاه‌ها تخفیف‌های تصادفی ارائه می‌گردد.

آ.ر. در هر حال، مفهوم تعادل استراتژی آمیخته در بازی استراتژیک انگیزهٔ به وجود آوردن حرکت‌های تصادفی را در رفتار بازیگر را بیان نمی‌کند. معمولاً یک بازیگر هنگامی تصادفی عمل می‌نماید که قصد تاثیر گذاری بر رفتار سایر بازیگران را داشته باشد. برای مثال به نسخه ساده‌تری از بازی *سکه‌های جفت* (مثال ۲-۶) توجه نماید که در آن بازیگران تعداد زوج و یا فردی از اعداد را نشان می‌دهند. این بازی به طور کلاسیک به عنوان انگیزهٔ زیربنایی تعادل استراتژی آمیخته مورد استفاده قرار گرفته است، اما تصادفی سازی[۱] حرکت بازیگر توضیحی غیر موجه برای استراتژی آگاهانه بازیگر در یک بازی بنظر می‌رسد. حرکت هر بازیگر پاسخی است به حدس وی در مورد [حرکت] انتخابی که دیگران زده‌اند؛ حدس زدن یک عملگر روانشناسانه بوده و بسیار آگاهانه صورت می‌پذیرد و [امری] تصادفی نیست. مثالی دیگر که معمولاً برای بیان انگیزه اصلی در مفهوم تعادل

---

[۱] Randomization

استراتژی آمیخته مطرح می‌گردد، رابطه بین مسئولان جمع آوری و پرداخت کنندگان مالیات می‌باشد. مسئولان در تلاش برای جلوگیری از فرار مالیاتی هستند؛ به دلیل هزینه‌های این کار آنها تنها می‌توانند به صورت تصادفی [با استفاده از کنترل حساب‌های مالیات دهندگان] عمل نمایند. آنها می‌خواهند که مالیات دهندگان استراتژیشان را بداند. از دید حسابرسان مالیاتی به مانند آنچه در تعادل استراتژی آمیخته لازم است، تفاوتی میان استراتژی کنترل و عدم کنترل حساب مالیات دهندگان وجود ندارد. در این شرایط، بازی می‌بایست به این صورت که حسابرسان احتمال بررسی را تعیین و در پی اعلام آن مالیات دهندگان حرکت خود را انتخاب نمایند مدل سازی گردد. در چنین مدلی مجموعه تصادفی سازی‌های ممکن مجموعه استراتژی‌های خالص است.

م.اً. مساله اصلی در تعبیر تعادل استراتژی آمیخته بازیگر به عنوان یک انتخاب آگاهانه این واقعیت است که در تعادل استراتژی آمیخته هر بازیگر میان تمامی استراتژی‌های آمیخته‌اش که محمل‌شان زیر مجموعه استراتژی تعادل است بی‌تفاوت[1] می‌باشد: استراتژی تعادل بازیگر با توجه به رفتار تعادل داده شدهٔ دیگر بازیگران تنها یکی از استراتژی‌هایی است که برای بازیگر نتیجه یکسان با بازده انتظاری دارد. در هر حال، این مشکل تنها به تعادل استراتژی‌های آمیخته محدود نمی‌گردد. برای مثال، این مساله دامنگیر بسیاری از بازی‌های ترتیبی (به انضمام تمامی بازی‌های تکرار شونده) که بازیگر بین استراتژی تعادل و تعداد زیادی استراتژی غیر تعادلی بی-تفاوت است نیز وجود دارد. دیگر اینکه، در بعضی از بازی‌ها ممکن است دلایل دیگری برای انتخاب تعادل استراتژی آمیخته وجود داشته باشد. به عنوان مثال، در بازی‌های اکیداً رقابتی تعادل استراتژی آمیخته می‌تواند بازده بازیگر را *اکیداً* بیشینه گرداند. (در مثال سکه‌های جفت این امر قابل مشاهد است.) در نهایت، استدلال بدیع هَرَسنئی (۱۹۷۳)[2] (در بخش ۳-۲-۴ مورد توجه قرار گرفته) به [فهم] این جنبه از تعادل استراتژی آمیخته کمک خواهد نمود.

م.اً. تعادل استراتژی آمیخته توضیحی بسیار مناسبی از فضای حالت رفتار بازیگرانی است که در بازی *سکه-های جفت* به صورت یک بازی تکرار شونده در برابر حریف‌های تصادفی قرارگرفته‌اند به نظر می‌رسد. در چنین شرایطی بازیگر در هیچ کدام از رویاروی‌هایش با بازیگر دیگر راهی برای حدس حرکت او ندارد، از این رو برای بازیگر مناسب است که استراتژی را بکار گیرد که بازدهی را که می‌تواند تضمین نماید بیشینه گرداند. اگر دو بازیگر به طور تکرار شونده متقابلاً در هم کنش باشند آنگاه روانشناسی حدس زدن امکان ایجاد آگاهی از رفتار [بازیگران] را به وجود خواهد آورد، و در این موارد نیز استراتژی تعادل توضیح مناسب رفتار بازیگران به نظر می-رسد. بازی حسابرسی مالیاتی را به همین صورت با بکار گیری بازی استراتژیک که در آن انتخاب‌های بازیگران توام هستند می‌توان مدل سازی نمود. احتمال حسابرسی در تعادل که توسط حسابرسان تعیین می‌گردد یکسان با بازیی است که ابتدا حسابراسان حرکت نمایند؛ با فرض اینکه حرکت مالیات دهندگان داده شده باشد، تفاوتی میان انجام حسابرسی و عدم انجام آن از دید حسابرسان وجود نخواهد داشت.

۳-۲-۲ *تعادل استراتژی آمیخته نَش به صورت فضای حالت*

در فصل دوم تعادل نَش را به صورت فضای حالت محیطی که در آن بازیگران با نادیده دانستن رابطه استراتژیکی که میانشان ممکن است وجود داشته باشد و [شرایطی که پیوسته] در حال تکرار شدن است تعبیر نمودایم. تعادل استراتژی آمیخته نَش را نیز به صورت فضای حالت تصادفی می‌توانیم تعبیر نماییم. بازیگران تواتُر انجام حرکتی که صورت گرفته را از قبل می‌دانند ([مثلاً] "هشتاد درصد از مواقع بازیگری که نقش بازیگر اول را بازی می‌نماید حرکت a_1 و بیست درصد از مواقع حرکت b_1 را انجام داده")؛ هر بازیگر از این تواتر برای تشکیل

---

[1] indifferent

[2] Harsanyi (1973)

باور خودش در مورد رفتار آینده سایر بازیگران استفاده می‌کند، و بعد از آن حرکت خود را انجام خواهد داد. در تعادل، این تواترها در طول زمان ثابت مانده و به صورتی پایدار خواهد بود که هر حرکتی با احتمال انجام مثبت توسط بازیگر بر اساس باورهای فضای حالت انجام گیرد بهینه است.

تعادل استراتژی آمیخته پیشبینی می‌نماید که برآمد بازی می‌تواند تصادفی بوده، از این رو در یک دورِ بازی، پیشبینی مزبور کمتر از استراتژی تعادل خالص دارای دقت می‌باشد. اما همانگونه که در بخش ۱-۵ ادعا گشت، نقش نظریه بازگو نمودن اصول بنیادین بوده؛ بر این اساس اصطلاح تعادل استراتژی آمیخته نیز برای تصویر اصول تصادفی طبیعت می‌باشد.

نوع دیگر این تعبیر بر پایه تعبیری از بازی n نفره می‌باشد که به صورت مدلی از برهم‌کنش n گروه بزرگ است. هر اتفاقِ بازی هنگامی صورت می‌گیرد که n نفر به صورت تصادفی از هر گروه انتخاب گردند. احتمالات [انجام حرکت‌ها] در تعادل استراتژی آمیخته تواتُر فضای حالتی می‌باشد که عضو A_i در جمعیت iام استفاده کرده است می‌توان تعبیر نمود. در این تعبیر بازی صورت تقلیل یافته مدلی است که گروه افراد را به صورت صریح[1] [داده شده] فرض می‌نماید.

فرضی که شالوده تعبیر فضای حالت [تعادل استراتژی آمیخته] می‌باشد این است که بازیگر هیچ همبستگی میان حرکت‌های دیگر بازیگران و یا حتی بین رفتار خودش و حرکت‌های سایرین نمی‌یابد. با برداشتن این فرض به مفهوم تعادل همبسته خواهیم رسید که در بخش ۳-۳ توضیح داده خواهد شد.

۳-۲-۳ *استراتژی آمیخته به صورت استراتژی خالص در بازی دامنه دار*

قبل از انتخاب حرکت بازیگر ممکن است اطلاعات فردی[2] [یا شخصی] تصادفی، به صورت نامستدل از رویکرد سایر بازیگران، دریافت نماید که حرکت بازیگر به آن وابسته باشد. بازیگر ممکن است آگاهانه رابطه‌ای بین حرکت خود و این اطلاعات فردی انتخاب ننماید؛ تنها ممکن است به نظر رسد که همبستگی بین این دو وجود دارد به این دلیل از دید ناظر خارجی و یا سایر بازیگران حرکت بازیگر "تصادفی" به نظر خواهد رسید. در مدل سازی رفتار بازیگر به صورت تصادفی، تعادل استراتژی آمیخته نشانگر وابسته بودن رفتار به عواملی است که بازیگران آنها را نا مرتبط می‌داند. از سویی دیگر، بازیگر ممکن است از این عوامل خارجی که رفتار حریفش را تعیین می‌کند آگاه باشد اما کشف این رابطه را عملی هزینه بر و یا غیر ممکن بداند. (به دلیل مشابه ما برآمد انداختن یک سکه را تصادفی مدل سازی می‌نماییم بجای آنکه آن را نتیجه برهمکنش موقعیت اولیه آن، سرعت پرتاب، سرعت باد و دیگر عوامل بدانیم.) به طور خلاصه، در این رویکرد، تعادل استراتژی آمیخته نَش توضیحی از فضای حالت سیستم است که نشانگر عناصری حذف شده از توضیح اصلی بازی می‌باشد.

بازی BoS (مثال ۳-۱) مثالی ملموس برای چنین تعبیری است. همان طور که دیده شد این بازی یک تعادل استراتژی آمیخته $\left((\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\right)$ دارد. اکنون تصور نماید که هر بازیگر سه نوع "حس" ممکن دارد که به وسیله عواملی که نمی‌داند تعیین می‌گردد. هر بازیگر مستقل از سایر بازیگران در هر ثلث از مواقع می‌تواند دارای یکی از این حس‌ها باشد؛ حس بازیگر اثری بر بازده‌اش در بازی ندارد. فرض کنید بازیگر اول هنگامی که دارای حس ۱ و یا ۲ باشد *باخ* را انتخاب نموده و هر گاه که داری حس ۳ بوده *استراوینسکی* را انتخاب می‌نماید، بازیگر دوم نیز هنگامی که در حس ۱ باشد انتخابش *باخ* بوده و در صورتی که دارای حس ۲ و یا ۳ باشد *استراوینسکی* را انتخاب می‌نماید. چنانچه این شرایط را به صورت یک بازی بیزی بنگریم که این سه حس ممکن بازیگر معادل نوع [بازیگر در بازی بیزی] است، این گونه رفتار که به صورت استراتژی خالص تعریف می‌گردد

---

[1] explicit

[2] Private Information

دقیقاً معادل استراتژی آمیخته در فرم اصلی این بازی خواهد بود. لازم به ذکر است این نوع تعبیر از تعادل استراتژی آمیخته وابسته به فرض توزیع مساوی حس بازیگران در طول زمان نیست؛ در این حالت تنها لازم است اطلاعات فردی بازیگران به اندازه کافی کامل باشد که به توان با آن متغیر تصادفی مناسبی ساخت. با این وجود، نیاز به وجود چنین ساختار اطلاعاتی محدودیت این تعبیر می‌باشد.

آ.ر. سه انتقاد به این تعبیر وارد می‌باشد. اول، قبول این مساله دشوار می‌باشد که بازیگر آگاهانه رفتاری بر پایه عواملی انجام دهد که اثری بر بازده وی نداشته باشند. معمولاً افراد دلایلی برای انتخاب‌هایشان عنوان می‌کنند؛ مدل سازی که می‌خواهد از مفهوم تعادل استراتژی آمیخته در شرایطی خاص استفاده نماید می‌بایست دلایلی نامربوط[1] در مورد بازده [بازیگران] را عنوان نماید و توضیح دهد که وابستگیی بین اطلاعات فردی بازیگر و انتخاب او لازم است.

م.اً. در تعادل استراتژی آمیخته هر بازیگر میان تمامی حرکت‌های که در محمل استراتژی تعادلش می‌باشد بی تفاوت است، از اینرو انتخاب حرکت توسط مدل ساز بر پایه عوامل "نامربوط" نامعقول نمی‌باشد. هنگامی از افرادی که حرکتشان را از مجموعه‌ای که اعضایش به طور یکسان جذاب باشند انتخاب کنند پرسیده شود چگونه این انتخاب را کرده‌اید تنها جوابی شبیه "نمی‌دانم- تنها اینگونه احساس کردم" خواهید شنید.

آ.ر. دوم، رفتار [بازیگر] که با این تعبیر از تعادل شکل می‌گیرد بسیار شکننده است. [برای مثال] اگر رفتار یک مدیر به واسطه صبحانه‌ای که می‌خورد تعیین گردد، آنگاه عوامل خارج از مدل، مثل تغییر رژیم غذایی و یا تغییر قیمت تخم مرغ، ممکن است تواتر انتخاب حرکت‌های او را تغییر دهد، بدین طریق موجب تغییر در باورهای بازیگر دیگر گردیده و ناپایداری به وجود خواهد آورد.

م.اً. برای هر ساختار واقعه‌ای تصادفی یک الگوی رفتار وجود دارد که به تعادل *یکسانی* منجر خواهند شد. برای مثال، اگر، قبل از آنکه افزایش قیمتی در مورد تخم مرغ به وجود بیاید، تعادلی به این صورت که در روزهای که مدیر همراه با صبحانه تخم مرغ خورده و قبل از ساعت ۷:۳۰ از خواب بیدار شده باشد در آنها [به مشتریان] تخفیف می‌داده وجود داشته باشد، بعد از افزایش قیمت تخم مرغ، ممکن است تعادل تغییر کرده و او تخفیف را در روزهای بدهد که صبحانه تخم مرغ خورده و قبل از ساعت ۸:۰۰ بیدار گردیده. بعد از افزایش قیمت دیگر الگوی رفتار قبلی او دیگر بهترین پاسخ به استراتژی سایر بازیگران نیست؛ خواه سیستم خود را با شرایط جدید به صورتی *پایدار* وفق دهد و یا تعادل جدید در یک فرآیند وفق پذیری بدست آید. استراتژی تعادل آمیخته از این رو شکننده به نظر می‌رسد که بازیگران انگیزه مثبتی در پیروی از الگوی رفتار تعادلی‌شان ندارند (از آنجا که استراتژی‌های تعادل به طور *یکتا* بهینه نیستند)؛ از این گذشته، تعادل با این تعبیر بیش از هر تعبیر دیگری از آن شکننده نیست. (و ، بار دیگر اینکه، این مساله توسط مدل هَرَسنئی توضیح داده شده که در بخش بعد ارائه می‌گردد.)

آ.ر. سوم، به منظور تعبیر تعادل به این صورت در یک مساله خاص لازم است از زندگی حقیقی به صورت متغیر بیرونی که پایه رفتار بازیگران است بهره گرفته شود. برای مثال، برای تعبیر نمودن یک تعادل استراتژی آمیخته رقابت در قیمت می‌بایست هم عوامل خارج از مدل که پایه قیمت گذاری بنگاه هستند لحاظ گردد و هم نشان داده شود که ساختار اطلاعات به اندازه کامل است که تمامی تعادل‌های استراتژی آمیخته نَش را پوشش می‌دهد. افرادی که مفهوم تعادل استراتژی آمیخته را به کار می‌برند به ندرت این گونه عمل می‌نمایند.

م.اً. متغیرهای تصادفی بسیاری ممکن است بر حرکت بازیگر در جهان تاثیر بگذارند: زمانی که او از خواب بر می‌خیزد، "حس" بازیگر در لحظه، زمانی که روزنامه‌اش به دستش رسیده، ... . ساختار این متغییرهای تصادفی به قدری گسترده است که دیگر لازمی ندارد آنها را در هر کاربردی از نظریه استفاده نماییم. به منظور تعبیر

[1] irrelevant

استراتژی آمیخته به صورت استراتژی خالص در یک بازی بزرگ کافیست به آسانی این ایده که حرکت انتخابی بازیگر ممکن است وابسته به عواملی خارج از مدل باشد را در نظر بگیریم.

۳-۲-۴ *استراتژی آمیخته به صورت استراتژی خالص در بازی مغشوش* [۱]

در اینجا پایه منطقی تعادل استراتژی آمیخته را بر اساس هَرسنئی (۱۹۷۳)[۲] خواهیم آورد. بازی را به صورت شرایطی که مرتباً تکرار می‌گردد و اولویت‌های بازیگران تحت تغییرات اندکی قرار دارند در نظر خواهیم گرفت. (پس، همانند بحث بخش قبل، عوامل تصادفی وجود داشته، اما این عوامل در اینجا بر بازده [بازی] موثر می‌باشد.) در هر بار رویدادن بازی هر بازیگر از اولویت‌های خود آگاه است اما اولویت‌های دیگران را نمی‌داند. تعادل استراتژی آمیخته تواتر حرکت‌های انتخابی بازیگران است که در طول زمان انجام می‌دهند.

فرض کنید $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ یک بازی استراتژیک متناهی بوده و $\varepsilon=(\varepsilon_i(a))_{i\in N,\, a\in A}$ گردایه[۳] متغیرهای تصادفی در بازه $[-1,1]$ که تابع توزیع احتمال مطلقاً پیوسته و متغیرهای تصادفی $(\varepsilon_i)_{i\in N}$ مستقل باشند. با در نظر گرفتن خانواده بازی‌های مغشوش که بازده هر بازیگر i هنگام برآمد a تحت اثر تغییرات تصادفی اندکی است، هر بازیگر i مقدار واقعی $(\varepsilon_i(a))_{a\in A}$ از ε_i را می‌داند، اما در مورد مقدار واقعی متغییر تصادفی سایر بازیگران اطلاعی ندارد. این [صورت بندی]، به مثابه بازی بیزی $G(\varepsilon)$ که در آن مجموعه حالت‌های طبیعت مجموعه مقادیر قابل تصور ε می‌باشد، باور (عمومی) پیشین هر بازیگر تابع توزیع مشخص شده با ε است، تابع علامت بازیگر i تنها مقادیر واقعی $(\varepsilon_i(a))_{a\in A}$ بوده و بازده بازیگر i در برآمد a و حالت ε برابر $u_i(a)+\varepsilon_i(a)$ می‌گردد. (لازم به ذکر است تعداد نوع هر بازیگر نامتناهی است.)

نتیجه اصلی هَرسنئی (۱۹۷۳، قضیه‌های ۲ و ۷) تقریباً در مورد هر بازی G و هر گردایه ε^* از متغیرهای تصادفی دارای شرایط بالا بوده باشند صادق است، تقریباً هر تعادل استراتژی آمیخته نَش از بازی G یک نمای استراتژی آمیخته است که در محدودیتی قرار دارد، هنگامی که اندازه اغتشاش γ از میان رود، به مانند سری تعادل‌های استراتژی‌های خالص بازی بیزی $G(\gamma\varepsilon^*)$ که در هر یک حرکتی که توسط بازیگر انتخاب می‌شود *مطلقاً* بهینه است. از این گذشته، حد هر سری این چنینی به تعادل استراتژی آمیخته بازی G همگرا خواهد بود (هَرسنئی (۱۹۷۳، قضیه‌های ۵)). به بیان دیگر، هنگامی که تغییرات تصادفی بازده‌ها اندک باشد، تقریباً هر استراتژی آمیخته بازی G نزدیک به تعادل خالص بازی بیزی مرتبط با آن می‌باشد و *برعکس*. می‌توان اینچنین گفت که تعادل استراتژی آمیخته G با این مشخصه تحت ε^* *دست یافتنی* است. (به دلیل پیچیدگی نسبی ریاضیات این نتیجه اثبات‌های آن را در اینجا نمی‌آوریم.)

✧ تمرین ۳-۶ بازی دو نفره‌ای که هر یک از بازیگران دو استراتژی خالص، a_i و b_i دارند را در نظر بگیرید. با فرض نمودن δ_i برای $i=1,2$ به صورت متغیرهای تصادفی مستقل، که هر یک به طور یکنواخت در بازه $[-1,1]$ توزیع شده باشند، و همچنین فرض نماید متغیر تصادفی $\varepsilon_i(a)$ برای $i=1,2$ که در آن $a\in A$ با مشخصه $\varepsilon_1(a_1,x)-\varepsilon_1(b_1,x)=\delta_1$ برای $x=a_2,b_2$ و $\varepsilon_2(x,a_2)-\varepsilon_2(x,b_2)=\delta_2$ برای $x=a_1,b_1$.

الف. نشان دهید تمامی تعادل‌ها بازی BoS (مثال ۲-۱) تحت ε قابل دستیابی است.

ب. برای بازی که در آن $u_i(a_1,a_2)=1$ برای $i=1,2$ بوده و تمامی بازده‌های دیگر صفر می‌باشند، نشان دهید که تنها تعادل نَش استراتژی خالص (a_1,a_2) تحت ε قابل دستیابی است.

---

[۱] Perturbed Game

[۲] Harsanyi (1973)

[۳] collection

ج. برای بازی که در آن $u_i(a)=0$ برای $i=1, 2$ و برای تمامی $a \in A$، نشان دهید تنها تعادل استراتژی آمیخته نَش α که در آن $\alpha_i(a_i)=\alpha_i(b_i)$ برای $i=1, 2$ تحت ε قابل دستیابی است.
(سایر تعادل‌های تحت سایر اغتشاش‌ها قابل دسترس است.)

بدین طریق از دید هَرسنئی علت وجودی تعادل استراتژی آمیخته این است که حتی اگر بازیگر تلاشی برای به بکاربردن استراتژی‌های خالص خود با احتمالات لازم انجام ندهد، تغییرات تصادفی در تابع بازده بازیگر را وادار به انتخاب استراتژی‌های خالص با تواترهای صحیح خواهد نمود. رفتار تعادلی سایر بازیگران به گونه‌ای است که بازیگری که به طور یکسانی استراتژی خالص بهینه‌اش را بر پایه هر مقدار واقعی تابع بازده انتخاب می‌کند حرکت خود را با تواتر لازم تعادل استراتژی آمیخته‌اش انتخاب می‌گرداند.

م.اَ. نتیجه هَرسنئی پاسخ خوبی به این ادعاست که بازیگری که میان تمامی استراتژی‌هایش با محمل یکسان بی‌تفاوت است دلیلی برای انتخاب تعادل استراتژی آمیخته ندارد، می‌باشد. همان طور که در قبل عنوان نمودم در بعضی از بازی‌ها، از جمله بازی‌های مطلقاً رقابتی، از آنجا که بازیگران دلایل دیگری برای انتخاب تعادل استراتژی آمیخته خود دارند این انتقاد وارد نخواهد بود. نتیجه هَرسنئی نشان می‌دهد که تقریباً در هر بازی از آن جهت که تعادل استراتژی آمیخته نَش نزدیک به تعادل استراتژی اکیداً خالص هر بازی مغشوشی است که بازده بازیگران دچار تغییرات تصادفی اندکی هستند، به این دلیل چنین انتقاد حاشیه بسیار محدودی خواهد داشت.

۳-۲-۵ *استراتژی آمیخته به صورت باور*

طبق تعبیر دیگری، که در بخش ۵-۴ به طور مفصل توضیح داده خواهد شد، تعادل استراتژی آمیخته نَش یک نما β از باورهای [بازیگران] می‌باشد، که در آن β_i باور مشترک تمامی دیگر بازیگران در مورد حرکت بازیگر i است، با این مشخصه که برای هر بازیگر i هر حرکتی در محمل β_i با فرض داده شدن β_{-i} بهینه خواهد بود. بر اساس این تعبیر هر بازیگر به جای [انتخاب] استراتژی آمیخته یک حرکت را انتخاب می‌نماید. تعادل به جای آنکه تشکیل شده از حرکت‌های بازیگران باشد فضای حالتی از باورهای آنها است. این باورهای می‌بایست دارای دو مشخصه: میان تمامی بازیگران مشترک بوده و با فرض این که هر بازیگر بیشینه کنندهٔ مقدار مطلوبیت خود است سازگار باشند.

در صورت که از ابتدا با این ایده شروع نماییم، می‌توان مفهوم تعادل را به صورت زیر بیان کنیم.

- تعریف ۳-۳ تعادل استراتژی آمیخته نَش بازی متناهی یک نمای استراتژی آمیخته α^* با این مشخصه که برای هر بازیگر i هر حرکت در محمل α_i^* بهترین پاسخ به α_{-i} است، می‌باشد.

بر اساس لم ۳-۱ نشان می‌توان داد که این تعریف معادل تعریف قبلی ۳-۲ بوده و از این رو تضمین خواهد نمود که این ایده تعبیری از تعادل استراتژی آمیخته است.

به هر حال، لازم به ذکر است، این صورت از تعبیر توان کمی در پیشبینی تعادل دارد: تنها این رویکرد می-توان پیشبینی نماید که هر بازیگر حرکتی را به کار می‌برد که بهترین پاسخ به تعادل باورها باشد. مجموعه چنین بهترین پاسخ‌هایی هر حرکتی را در محمل تعادل استراتژی آمیخته بازیگران اضافه می‌نماید و حتی ممکن است حرکت‌هایی خارج از محمل این استراتژی را نیز شامل شود.

۳-۳ تعادل همبسته

در بخش ۳-۲-۳ تعبیری را به صورت فضای حالت از تعادل استراتژی آمیخته که حرکت هر بازیگر وابسته به علامتی دریافتی‌شان از "طبیعت" است، بررسی نمودیم. در این تعبیر علامت‌ها شخصی و مستقل هستند.

حال در صورتی که علامت‌ها شخصی و مستقل نباشد چه اتفاقی خواهد شد؟ برای مثل تصور نماید در یک بازی BoS (شکل ۳-۱) دو بازیگر متغییر تصادفی که دو مقدار x و y را به احتمال $\frac{1}{2}$ می‌گیرد را مشاهد می‌کنند. اگر آنها تصور نمایند x مقدار واقعی است *باخ* را انتخاب و در صورت تشخیص y *استراونسکی* را بر خواهند گزید، آنگاه با تعادل جدیدی روبرو خواهیم بود. با فرض داده شدن اطلاعات بازیگران، حرکت بازیگر بهینه می‌باشد: اگر مقدار واقعی متغییر x بوده آنگاه بازیگر خواهد دانست که حرکت [انتخابی] بازیگر دیگر *باخ* است، از اینرو انتخاب *باخ* برایش بهینه می‌باشد، به همین صورت در مواجه با y نیز حرکت [بهینه را] انجام خواهد داد.

در این مثال بازیگران متغییر تصادفی یکسانی را مشاهد می‌نمایند. به طور کلی‌تر، ممکن است اطلاعات آنها کاملاً همبسته نباشد. به فرض مثال، متغییر تصادفی که سه مقدار x، y و z را می‌تواند اختیار نماید را تصور نماید، بازیگر اول تنها امکان تشخیص x و یا عضویت [علامت طبیعت] در مجموعه $\{y,z\}$ را داشته و بازیگر دوم تنها توان تمیز دادن [علامت] z و یا عضویت آن را در مجموعه $\{x,y\}$ را دارد. به بیان دیگر، *افراز اطلاعات* بازیگر اول $\{\{x\},\{y,z\}\}$ و برای بازیگر دوم $\{\{x,y\},\{z\}\}$ می‌باشد. با این فرضیات استراتژی بازیگر اول از دو حرکت تشکیل یافته است: حرکتی که این بازیگر هنگامی که می‌داند علامت x و حرکتی که او تنها می‌داند علامت عضو مجموعه $\{y,z\}$ است، استفاده می‌کنند. به طور مشابه بازیگر دوم نیز دو حرکت خواهد داشت، یکی در هنگام z و دیگری برای $\{x,y\}$. استراتژی بازیگر بهینه خواهد بود اگر، با فرض داده شدن استراتژی دیگر بازیگران، برای هر تصوری از اطلاعات [(علامت‌های محیط)] بازیگر نتواند حرکت بهتری متفاوت از استراتژی دیکته شده توسط استراتژی خودش داشته باشد. به منظور نشان دادن چگونگی استفاده بازیگران از اطلاعات در انتخاب حرکت بهینه، فرض کنید احتمال y و z به ترتیب η و ζ همچنین استراتژی بازیگر دوم انجام حرکت a_2 در صورت که بداند که علامت در مجموعه $\{x,y\}$ و حرکت b_2 است اگر بداند که علامت z بوده است. سپس اگر بازیگر اول بداند که یکی از y و یا z رخداده است او حرکت بهینه-اش با فرض انتخاب حرکت a_2 به احتمال $\eta/(\eta+\zeta)$ (احتمال y به شرط $\{x,y\}$) و یا حرکت b_2 به احتمال $\zeta/(\eta+\zeta)$ توسط بازیگر دوم انتخاب خواهد نمود.

این مثال ما را به تعریف مفهوم زیر از تعادل می‌رساند.

- تعریف ۳-۴ **تعادل همبسته** از **یک بازی استراتژیک** $\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ متشکل از
  - فضای متناهی احتمال (Ω,π) (Ω مجموعه **حالت‌ها** و π یک اندازه احتمال روی Ω است)
  - برای هر بازیگر $i \in N$ یک افراز P_i از Ω (**افراز اطلاعات** بازیگر i)
  - برای هر بازیگر $i \in N$ و هر تابعی به صورت $\sigma_i : \Omega \to A_i$ با مشخصه $\sigma_i(\omega)=\sigma_i(\omega')$ هنگامی که $\omega \in P_i$ و $\omega' \in P_i$ برای آنهایی که $P_i \in \mathrm{P}_i$ (σ_i **استراتژی** بازیگر i است)

به گونه‌ای که برای هر $i \in N$ و هر تابع $\tau_i : \Omega \to A_i$ که $\tau_i(\omega)=\tau_i(\omega')$ هنگامی که $\omega \in P_i$ و $\omega' \in P_i$ برای آنهایی که $P_i \in \mathrm{P}_i$ (به عبارت دیگر، برای هر استراتژی بازیگر i) خواهیم داشت

$$\sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)u_i(\sigma_{-i}(\omega),\sigma_i(\omega)) \geq \sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)u_i(\sigma_{-i}(\omega),\tau_i(\omega)) \,. \qquad (۳-۲)$$

توجه داشته باشید که فضای احتمال و افراز اطلاعات برونزا نیستند و جزیی از تعادل محسوب می‌شوند. همچنین لازم به ذکر است نامعادله (۳-۲) معادل این الزام است که برای هر حالت ω که با احتمال مثبت اتفاق می‌افتد حرکت $\sigma_i(\omega)$ با فرض داده شدن استراتژی و دانش بازیگر i در باره ω بهینه خواهد بود. (این خاصیت معادل بودن بر پایه فرض پیروی اولویت‌های بازیگران از نظریه مطلوبیت انتظاری است.)

حال با نشان دادن این مطلب که مجموعه تعادل‌های همبسته دربرگیرنده مجموعه تعادل‌های استراتژی آمیخته نَش نیز می‌باشند آغاز می‌نماییم.

❖ قضیه ۳-۲ *برای هر تعادل استراتژی آمیخته نَش α از بازی استراتژیک متناهی $\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ تعادل همبسته‌ای $\langle(\Omega,\pi),(\mathrm{P}_i),(\sigma_i)\rangle$ وجود دارد که برای هر بازیگر $i\in N$ توزیع [احتمال] روی A_i که با σ_i القا می‌شود برابر α_i است.*

اثبات. با قرار دادن $\Omega=A\ (=\times_{j\in N}A_j)$ و تعریف π به وسیله $\pi(a)=\prod_{j\in N}\alpha_j(a_j)$. همچنین، برای هر $i\in N$ و $b_i\in A_i$ قرار می‌دهیم $P_i(b_i)=\{a\in A: a_i=b_i\}$ و P_i متشکل از $|A_i|$ مجموعه $P_i(b_i)$ می‌باشد. σ_i را به صورت $\sigma_i(a)=a_i$ برای هر $a\in A$ تعریف می‌کنیم. سپس $\langle(\Omega,\pi),(\mathrm{P}_i),(\sigma_i)\rangle$ تعادل همبسته است از آنجا که نامعادله (۳-۲) برای هر استراتژی τ_i برقرار است: طرف چپ این نامعادله بازده بازیگر i در تعادل استراتژی آمیخته نَش α و طرف راست بازده او و همگامی که از استراتژی آمیخته استفاده کرده که در آن حرکت $\tau_i(a)$ با احتمال $\alpha_i(a_i)$ انجام داده و هر بازیگر دیگر j استراتژی آمیخته α_j را استفاده کرده است. علاوه بر این، توزیع روی A_i که با σ_i القا گشته α_i خواهد بود.

مثال زیر بیان صوری مثالی است که در ابتدای این بخش ارائه گردید.

◆ مثال ۳-۲ سه نمای بازده تعادل استراتژی آمیخته نَش بازی BoS (مثال ۳-۲ را بنگرید) به صورت $(2,1)$، $(1,2)$ و $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ است. علاوه بر آن نتیجه یکی از تعادل‌های همبسته نمای بازدهی برابر $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ دارد: با قرار دادن $\Omega=\{x,y\}$، $\pi(x)=\pi(y)=\frac{1}{2}$، $\mathrm{P}_1=\mathrm{P}_2=\{\{x\},\{y\}\}$، $\sigma_i(x)=Bach$ و $\sigma_i(y)=Stravinsky$. یک تعبیر برای این تعادل این است که بازیگران برآمد پرتاب یک سکه به صورت عمومی مشاهد کرده، که از روی آن تعیین نمایند که کدام یک از دو تعادل نَش خالص خود را بازی نمایند.

نتیجه زیر از این مثال الهام گرفته است.

❖ قضیه ۳-۳ *اگر $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ یک بازی استراتژیک باشد، هر ترکیب محدب از نماهای بازده تعادل همبسته از G یک نمای بازده تعادل همبسته از G خواهد بود.*

اثبات. فرض کنید $u^1,\dots,u^K$ نماهای بازده تعادل همبسته و $(\lambda^1,\dots,\lambda^K)$ با مشخصات $\lambda^k\geq 0$ برای تمامی kها و $\sum_{k=1}^{K}\lambda^k=1$ باشند. برای هر مقداری از k با فرض کنید $\langle(\Omega^k,\pi^k),(\mathrm{P}_i^k),(\sigma_i^k)\rangle$ به عنوان یک تعادل همبسته که بازده u^k را بدست می‌دهد؛ همچنین بدون آنکه از کلیت مساله چیزی کم شود، می‌توان تصور نمود مجموعه‌ها Ω^k از یکدیگر منفک هستند. به صورت زیر تعادل همبسته‌ای را تعریف نموده که نمای بازده‌اش $\sum_{k=1}^{K}\lambda^k u^k$ باشد. با قراردادن $\Omega=\bigcup_k\Omega^k$، و برای هر $\omega\in\Omega$ با استفاده از $\pi(\omega)=\lambda^k\pi^k(\omega)$، π را تعریف می‌نماییم، که k به گونه‌ای است که $\omega\in\Omega^k$. برای هر $i\in N$ می‌توان $\mathrm{P}_i=\bigcup_k\mathrm{P}_i^k$ قرارداد و σ_i را با استفاده از $\sigma_i(\omega)=\sigma_i^k(\omega)$ تعریف نمود که در آن k به گونه‌ای است که $\omega\in\Omega^k$ باشد.

می‌توان تعادل همبسته که در این اثبات ساخته‌ایم اینگونه تعبیر نمود: در ابتدا یک دستگاه با مکانیسمی تصادفی مشخص می‌نماید که کدام یک از این K تعادل همبسته می‌بایست بازی شود، و در پی آن متغییر تصادفی مرتبط با kامین تعادل همبسته مشخص می‌شود.

	L	R
T	$6,6$	$2,7$
B	$7,2$	$0,0$

	L	R
T	y	z
B	x	$-$

شکل ۳-۲ مثالی از تعادل همبسته. در شکل سمت چپ یک بازی استراتژیک نشان داده شده است. در جدول سمت راست انتخاب‌های بازیگران به صورت تابع حالت در یک تعادل همبسته بازی نشان داده شده است.

◆ مثال ۳-۳ بازی نمایش داده شد در سمت چپ شکل ۳-۲ را در نظر بگیرید. نماهای بازده تعادل نَش $(2,7)$ و $(7,2)$ (خالص) و $(4\frac{2}{3},4\frac{2}{3})$ (آمیخته) این بازی می‌باشد. تعادل همبسته زیر نمای بازدهی را نتیجه خواهد داد که خارج از ترکیب بسته محدب سه نمای بالا است. با قرار دادن $\Omega=\{x,y,z\}$ و $\pi(x)=\pi(y)=\pi(z)=\frac{1}{3}$؛ همچنین افراز [اطلاعات] بازیگر اول $\{\{x\},\{y,z\}\}$ و بازیگر دوم $\{\{x,y\},\{z\}\}$ در نظر بگیرید. استراتژی‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\sigma_1(x)=B$ و $\sigma_1(y)=\sigma_1(z)=T$؛ $\sigma_2(x)=\sigma_2(y)=L$ و $\sigma_2(z)=R$. (رابطه بین انتخاب‌ها و حالات‌ها در قسمت دست راست شکل ۳-۲ آورده شده است.) در این صورت رفتار بهینه بازیگر اول با فرض رفتار داده شدن رفتار بازیگر دیگر به صورت: در حالت x، بازیگر اول می‌داند که دیگری L را بازی خواهد کرد و از این رو بازی بهینه برایش B است؛ در حالت‌های y و z، بازیگر اول احتمالات یکسانی به حرکت L و R توسط بازیگر دیگر خواهد داد و از اینرو استراتژی بهینه برای او انتخاب T است. به طور مشابه، رفتار بهینه بازیگر دوم را نیز با فرض دادن شدن رفتار بازیگر دیگر می‌توان بدست آورد و لذا تعادل همبسته‌ای خواهیم داشت؛ نمای بازده این تعادل همبسته $(5,5)$ خواهد بود.

در این مثال که ما توانستیم با استفاده از مجموعه حالت‌ها مجموعه برآمدها را نتیجه بگیریم؛ این مثال الهام بخش نتیجه زیر خواهد بود.

❖ قضیه ۳-۴ *اگر* $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ *یک بازی استراتژیک متناهی باشد. آنگاه هر توزیع احتمالی بر روی برآمدها که به توان آن را از تعادل همبسته* G *بدست آورد می‌توان آن را از تعادل همبسته‌ای که در آن مجموعه حالت‌ها* A *و برای هر بازیگر* $i\in N$ *افراز اطلاعات متشکل از تمامی مجموعه‌های به صورت* $\{a\in A: a_i=b_i\}$ *برای حرکت‌های* $b_i\in A_i$ *بوده، نیز بدست آورد.*

اثبات. اگر $\langle(\Omega,\pi),(\mathrm{P}_i),(\sigma_i)\rangle$ تعادل همبسته G باشد. آنگاه $\langle(\Omega',\pi'),(\mathrm{P}'_i),(\sigma'_i)\rangle$ نیز تعادل همبسته آن خواهد بود، که $\Omega'=A$، $\pi'(a)=\pi(\{\omega\in\Omega:\sigma(\omega)=a\}$ برای هر $a\in A$، P'_i متشکل از مجموعه نوع $\{a\in A: a_i=b_i\}$ برای حرکت‌های $b_i\in A_i$ و σ'_i با استفاده از $\sigma'_i=a_i$ تعریف خواهد گردید.

این نتیجه این امکان را به ما می‌دهد در محاسبه بازده تعادل همبسته، توجه‌مان را به تعادل‌هایی که در آنها حالت‌ها مجموعه برآمدها هستند معطوف نماییم. به هر حال توجه نمایید که چنین تعادل‌هایی را ممکن است به طور طبیعی تعبیری نداشته باشند.

در تعریف تعادل همبسته ما فرض نمودیم بازیگران باور مشترکی در باره احتمال رخدادن حالت‌ها دارند. اگر متغییر تصادفی مبنی بر اینکه بازیگران باورهای متفاوتی دارند وجود داشته باشد، آنگاه نماهای بازده تعادلی دیگری امکان پذیر خواهند بود. برای مثال، تصور نماید، بازیگر اول مطمئن است که تیم T_1 بر تیم T_2 پیروز خواهد شد، در همین حال بازیگر دوم نیز مطمئن است که در همان بازی تیم T_2 بر T_1 پیروز می‌شود. تعادل در چنین شرایطی مشابه بازی BoS (مثال ۳-۱) است، که اگر T_1 برنده باشد برآمد (*باخ، باخ*) و هرگاه پیروز میدان تیم T_2 باشد برآمد (*استراوینسکی، استراوینسکی*) خواهد بود، که در این شرایط بازده انتظاری هر بازیگر ۲ خواهد بود! (در بخش ۵-۳ نشان خواهیم داد هنگامی که بازیگران باورهای متفاوتی به صورت اینکه تنها فرض می‌نمایند که [باور] پیشین یکسانی دارند داشته باشند، نمی‌تواند میان آنها دانش مشترکی وجود داشته باشد.)

✧ تمرین ۳-۷ بازی سه نفره‌ای را که بازده‌هایش در شکل ۳-۳ آورده شده است را در نظر بگیرید. (بازیگر اول یکی از دو سطر را انتخاب می‌نماید، بازیگر دوم یکی از دو ستون را انتخاب می‌نماید، و بازیگر سوم یکی از سه جدول را انتخاب خواهد کرد.)

الف. نشان دهید بازدهی استراتژی خالص تعادل $(1,0,0)$، $(0,1,0)$ و $(0,0,0)$ می‌باشد.

ب. نشان دهید که هنگامی بازیگر سوم B را انتخاب کرده و بازیگرهای اول و دوم (T,L) و (B,R) را با احتمال مساوی بازی کنند تعادل همبسته‌ای وجود دارد.

ج. توضیح دهید بازیگر سوم ترجیح می‌دهد نداند که بازیگر اول و دوم حرکت‌هایشان را با یکدیگر هماهنگ می‌نمایند.

	A: L	A: R	B: L	B: R	C: L	C: R
T	$0,0,3$	$0,0,0$	$2,2,2$	$0,0,0$	$0,0,0$	$0,0,0$
B	$1,0,0$	$0,0,0$	$0,0,0$	$2,2,2$	$0,1,0$	$0,0,3$

شکل ۳-۳ یک بازی سه نفره. بازیگر اول یکی از دو سطر را انتخاب می‌نماید، بازیگر دوم یکی از دو ستون را انتخاب می‌نماید، و بازیگر سوم یکی از سه جدول را انتخاب خواهد کرد.

۳-۴ تعادل تکاملی

در این بخش ایده اساسی گونه دیگری از مفهوم تعادل نَش را که *تعادل تکاملی*[1] گفته میشود را بررسی می‌نماییم. این مفهوم به منظور مدل سازی شرایطی که حرکت بازیگران به وسیله نیروهای تکاملی تعیین می‌گردد طراحی گشته است. در اینجا تنها به بررسی صورت ساده تعادل تکاملی خواهیم پرداخت که در آن اعضا یک گروه از موجودات (حیوانات، انسانها، گیاهان، ...) به صورت جفت با یکدیگر اندر کنش دارند. در هر تقابل هر موجود حرکتی را از مجموعه B انجام می‌دهد. موجودات آگاهانه حرکت‌ها را انتخاب نمی‌کنند؛ آنها یا از نیاکان‌شان شیوه رفتار را به ارث برده و یا به واسطه جهش [رفتاری] در آنها شکل گرفته. فرض می‌کنیم تابع u که توان موجود را در زنده ماندن نشان می‌دهد وجود دارد: اگر موجود حرکت a را وقتی با توزیع β از حرکت‌ها بالقوه در گروه مقابل روبروست، آنگاه توانایی در ادامه زندگی با مقدار انتظاری $u(a,b)$ تحت β اندازه گرفته خواهد شد. این توضیح معادل بازی استراتژیک متقارن دو نفره $\langle \{1,2\},(B,B),(u_i)\rangle$ که $u_1(a,b)=u(a,b)$ و $u_2(a,b)=u(a,b)$ است می‌باشد.

حرکتی که می‌تواند به عنوان تعادل تکاملی قلمداد گردد عضو مجموعه B باشد. مفهوم تعادل تکاملی بر اساس فضای حالتی طراحی گردیده است که در آن تمامی موجودات این حرکت را انجام داده و هیچ موجود جهش یافته‌ای نمی‌تواند علیه گروه رفتار نماید. به طور دقیق‌تر، ایده [تعادل تکاملی] به این صورت است که برای هر حرکت ممکن $b \in B$ فرآیند تکاملی هر از مدتی کسر کوچکی از جمعیت را به سویی جهش خواهد داد که از [حرکت تعادلی] b پیروی نمایند. در تعادل هر موجود جهش یافته‌ای که بازده انتظاری کمتر از حرکت تعادل داشته باشند از میان خواهد رفت. حال، اگر کسر $\varepsilon > 0$ از جمعیت گروه طوری جهش یافته باشند که حرکت b را انجام و مابقی موجودات حرکت b^* انجام دهند، آنگاه میانگین بازده یک جهش برابر $(1-\varepsilon)u(b,b^*)+\varepsilon u(b,b)$ خواهد بود ($1-\varepsilon$ احتمال جهش نیافتن و ε احتمال جهش است)، در مقابل میانگین بازده موجودات جهش نیافته برابر $(1-\varepsilon)u(b^*,b^*)+\varepsilon u(b^*,b)$ خواهد بود. در نتیجه برای اینکه b^* تعادل تکاملی باشد می‌بایست

$$(1-\varepsilon)\,u(b,b^*)+\varepsilon\,u(b,b)<(1-\varepsilon)\,u(b^*,b^*)+\varepsilon\,u(b^*,b)$$

[1] Evolutionary Equilibrium

برای تمامی مقادیر ε که به اندازه کافی کوچک باشند. این نامساوی برقرار خواهد بود اگر و تنها اگر برای هر $b \neq b^*$ یا $u(b,b^*) < u(b^*,b^*)$ و یا $u(b,b^*) = u(b^*,b^*)$ به همراه $u(b,b) < u(b^*,b)$ برقرار باشد، از این رو تعادل تکاملی را می‌توانیم به شیوه زیر تعریف نمود.

▪ تعریف ۳-۵ فرض کنید که $G = \langle \{1,2\}, (B,B), (u_i) \rangle$ یک بازی متقارن استراتژیک است، که در آن $u_1(a,b) = u_2(a,b) = u(a,b)$ باشد. **استراتژی پایدار تکاملی بازی**[۱] G حرکت $b^* \in A$ است که در آن (b^*,b^*) تعادل نَش بازی G و برای هر بهترین پاسخ $b \in A$ به b^* نامساوی $u(b,b) < u(b^*,b^*)$ برقرار بوده و $b \neq b^*$ باشد.

در مثال زیر، به مشابه سایر منابع این موضوع، مجموعه B را مجموعه استراتژی‌های آمیخته روی مجموعه متناهی حرکت‌ها در نظر می‌گیریم.

	D	H
D	$\frac{1}{2},\frac{1}{2}$	$0,1$
H	$1,0$	$\frac{1}{2}(1-c),\frac{1}{2}(1-c)$

شکل ۳-۴. بازی باز-کبوتر.

γ,γ	$1,-1$	$-1,1$
$-1,1$	γ,γ	$1,-1$
$1,-1$	$-1,1$	γ,γ

شکل ۳-۵ بازی بدون ESS. هر استراتژی خالصی نتیجه جهش یافته دارد که بازده‌اش بیش از تعادل استراتژی آمیخته متقارن یکتا بازی می‌باشد.

◆ مثال ۳-۴ (*کبوتر-باز*) هر چند گاهی حیواناتی که عضو یک گروه هستند بر سر طعمه‌ای به ارزش 1 با یکدیگر نبرد می‌نمایند. هر کدام از حیوانات می‌توانند رفتاری به مثابه یک کبوتر (D) و یا به صورت یک باز (H) داشته باشند. اگر هر دو حیوان رفتار کبوتر گونه داشته باشند می‌توانند طعمه را با یکدیگر نصف نمایند؛ اگر همانند باز رفتار نمایند ارزش طعمه به اندازه c کاهش یافته و سپس میان‌شان تقسیم خواهد شد؛ در صورتی نیز که یکی از آنها رفتاری باز گونه نماید تمامی ارزش طعمه را در مقابل دیگری که کبوتر گونه رفتار می‌کند تصاحب خواهد نمود. این بازی در شکل ۳-۴ نمایش داده شده است. (اگر $c > 1$ باشد، این بازی به ساختار شکل ۲-۵ در خواهد آمد.) فرض کنید B مجموعه استراتژی‌های آمیخته بر روی $\{D,H\}$ باشد. اگر $c > 1$، بازی تعادل استراتژی آمیخته نَش متقارن یکتا خواهد داشت، که در آن هر بازیگر از استراتژی $(1-1/c, 1/c)$ استفاده می‌نماید که تنها ESS بازی نیز می‌باشد. (به طور خاص، در این حالت گروهی که منحصراً رفتار باز گونه دارند به طور تکاملی ناپایدار هستند.) اگر $c < 1$، بازی تعادل استراتژی آمیخته منحصر به فردی دارد که در آن هر بازیگر از استراتژی خالص H استفاده خواهند نمود؛ این استراتژی تنها ESS بازی خواهد بود.

---

[۱] Evolutionary Stable Strategy(ESS)

بلافاصله می‌توان از تعریف ۳-۵ نتیجه گرفت که اگر (b^*,b^*) یک تعادل نَش متقارن باشد و هیچ استراتژی دیگر به جز b^* بهترین پاسخ به b^* نباشد (به عبارت دیگر (b^*,b^*) تعادل *اکید* باشد) آنگاه b^* یک ESS است. استراتژی تعادلی غیر اکید ممکن است ESS نباشد: یک بازی متقارن دو نفره را در نظر بگیرید که در آن هر بازیگر دو حرکت دارد و $u(a,b)=1$ برای تمامی $(a,b)\in B\times B$. مثال جالب‌تری از استراتژی غیر اکید که ESS نیز نیست بازی ارائه گشته در شکل ۳-۵ می‌باشد که در آن مجموعه B از تمامی استراتژی‌های آمیخته بر روی مجموعه سه عضوی و با شرط $0<\gamma<1$ است. این بازی دارای تعادل استراتژی آمیخته نَش متقارن منحصر به فرد می‌باشد که در آن هر استراتژی آمیخته بازیگر $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ است؛ در این تعادل بازده انتظاری هر بازیگر $\gamma/3$ خواهد بود. هر [بازیگر] جهش یافته‌ای که در مواجه با یک بازیگر جهش نیافته بازده انتظاری او برابر $\gamma/3$ خواهد بود اما همین بازیگر در رویاروی یک بازیگر جهش یافته دیگر بازده‌اش را افزایش داده و به γ خواهد رسانید. بدین دلیل در این بازی تعادل استراتژی آمیخته ESS نخواهد بود (از این رو بر اساس آنچه آورده شد هر بازی که تعادل نَش داشته باشد داری ESS نیست).

✧ تمرین ۳-۸ نشان دهید که هر بازی استراتژیک متقارن دو نفره‌ای که در آن هر بازیگر دو استراتژی خالص نَش داشته و بازده چهار نمای استراتژی‌ها متفاوت باشد، یک استراتژی آمیخته وجود دارد که ESS باشد.

یادداشت‌ها

صورت بندی مدرن استراتژی آمیخته بر اساس بُریل (۱۹۲۱؛ ۱۹۲۴، صفحات ۲۲۱-۲۰۴؛ ۱۹۲۷)[۱] ، هرچند که ایده آن حداقل به اوایل قرن هجدهم باز می‌گردد (گوئلباد (۱۹۶۱)[۲] و کوهن (۱۹۶۸)[۳] را ببینید). بُریل وجود تعادل استراتژی آمیخته نَش را برای حالت خاصی از بازی‌های اکیداً رقابتی نشان داد؛ فُن‌نِیومن (۱۹۲۸)[۴] وجود تعادل را در تمامی بازی‌های اکیداً رقابتی اثبات نمود. قضیه وجود [تعادل] (قضیه ۳-۱) که ما اثبات نمودیم (که تمامی بازی‌های استراتژیک متناهی را پوشش می‌دهد) بر اساس نَش (۱۹۵۰a، ۱۹۵۱)[۵] می‌باشد. مفهوم تعادل همبسته بر اساس آمِن (۱۹۷۴)[۶] بوده، که این مقاله او پایه‌ای برای دیگر مطالب بخش ۳-۳ نیز می‌باشد. ایده استراتژی پایدار تکاملی توسط مینارد اسمیت و پرایس (مینارد اسمیت (۱۹۷۲)[۷] و پرایس ومینارد اسمیت (۱۹۷۳)[۸] را بنگرید؛ همچنین مینارد اسمیت (۱۹۷۴، ۱۹۸۲)[۹]) به وجود آمده است.

مدلی که در بخش ۳-۲-۲ با ایده گروه بزرگی از بازیگران ارائه گشت توسط روزنسال (۱۹۷۹)[۱۰] مطرح گشته. ایده تعبیر نمودن تعادل استراتژی آمیخته به صورت استراتژی‌های خالص در بازی دامنه دار که در بخش ۳-۲-۳ آورده شد بر اساس هَرَسنئی (۱۹۷۳)[۱۱] بوده است، برای بخش ۳-۲-۴ نیز به همین منبع استفاده شده. تعبیر استراتژی آمیخته ارائه شده در بخش ۳-۲-۵ بر اساس هَرَسنئی (۱۹۸۷ a)[۱۲] بیان گشته است. انتقادهای

Borel (1921;1924, pp. 204-221; 1927) [۱]

Guilbaud (1961) [۲]

Kuhn (1968) [۳]

von Neumann (1928) [۴]

Nash (1950a, 1951) [۵]

Aummann (1974) [۶]

Maynard Smith (1972) [۷]

Maynard Smith and Price (1973) [۸]

Maynard Smith (1974, 1981) [۹]

Rosenthal (1979) [۱۰]

Harsanyi (1973) [۱۱]

Harsanyi (1987a) [۱۲]

مطرح گشته در بخش ۳-۲ به استراتژی آمیخته از روبن‌اشتاین (۱۹۹۱)[۱] برگرفته شده است. مثال‌های بخش ۳-۳ نیز براساس هَرَسنئی (۱۹۷۴)[۲] می‌باشد.

اثبات قضیه ۳-۱ از نَش (۱۹۵۰a)[۳] برگرفته شده است، این اثبات از قضیه نقطه ثابت کاکوتانی استفاده می‌نماید. نَش (۱۹۵۱)[۴] اثبات دیگری از این قضیه با بهره گرفتن از قضیه نقطه ثابت ساده تری از بوروایر که در توابع نقطه مقداری را بکار می‌برد ارائه نموده.

بازی ارائه شده در تمرین ۳-۱ از مولین (۱۹۸۶، صفحه ۷۲)[۵] گرفته شده. تمرین ۳-۵ برگرفته از اَرو، بازبن-کین و بِلَک‌ول (۱۹۵۳)[۶] است.

برای بررسی تعادل استراتژی آمیخته نَش وقتی که اولویت‌ها لزوماً از فرض تابع مطلوبیت انتظاری پیروی نمی‌کنند کروفرد (۱۹۹۰)[۷] را ببینید. مفهوم ESS که در بخش ۳-۴ ارائه شد، از جهات مختلف توسعه داده شده است برای آشنایی با توسعه این مفهوم وَن‌دام (۱۹۹۱، فصل ۹)[۸] را ببینید.

این پرسش را که آیا فرآیند پویای سازگاری در رسیدن به تعادل وجود دارد در اینجا ارائه ننمودیم. یکی از این فرآیندها *بازی داستانی* [۹] می‌باشد که توسط برون (۱۹۵۱)[۱۰] ارائه شده، که به تازگی مورد بازنگری واقع شده است. در این فرآیند هر بازیگر همیشه بهترین پاسخ را بر اساس تواتر آماری حرکت‌های گذشته دیگر بازیگران انتخاب می‌کند. رابینسون (۱۹۵۱)[۱۱] نشان می‌دهد که این فرآیند در هر بازی اکیداً رقابتی به تعادل استراتژی آمیخته نَش همگرا می‌شود؛ شاپلی (۱۹۶۴، بخش ۵)[۱۲] نشان می‌دهد که این مطلب در بازی‌هایی که اکیداً رقابتی نیستند لزوماً صادق نیست. تحقیقاتی متأخر بر روی مدل‌های که به صورت صریح توان تکامل و آموختن [بازیگران] را همزمان در خود دارند متمرکز شده است؛ به منظور آشنایی با این موضوع به باتی‌قالی، گیلی و مولیناری (۱۹۹۲)[۱۳] بنگرید.

---

[۱] Rubinstein (1991)

[۲] Harsanyi (1974)

[۳] Nash (1950a)

[۴] Nash (1950a)

[۵] Moulin (1986, p.72)

[۶] Arrow, Barankin and Blackwell (1954)

[۷] Crawford (1991)

[۸] van Damme (1991, Chapter 9)

[۹] Fictitious play

[۱۰] Brown (1954)

[۱۱] Robinson (1951)

[۱۲] Shapley (1964, Section 5)

[۱۳] Battigalli, Gilli and Molinari (1992)