بخش اول   بازی های استراتژیک

در این بخش به مطالعه مدل‌های برهم‌کنش استراتژیک میان عامل‌ها که به نام *بازی استراتژیک* مشهور هستند خواهیم پرداخت، این مدل به بیان فُن‌نیومن و مُورگِسترون (۱۹۴۴) "بازی در شرایط طبیعی" نامیده شده است. این مدل برای هر بازیگر یک مجموعه از حرکت‌های ممکن و یک ترتیب اولویت بر روی این حرکت‌های ممکن مشخص می‌نماید.

در فصل دوم، تعادل نَش را که به طور گسترده به عنوان راه‌حل برای بازی‌های استراتژیک استفاده گردیده توضیح خواهیم داد. در فصل سوم به توضیح دو تعادل نزدیک به هم به یعنی تعادل استراتژی آمیخته و تعادل همبسته که در آنها حرکت‌های بازیگران لزوماً قطعی نیستند می‌پردازیم. تعادل نَش یک مفهوم راه‌حل [از نوع تعبیر] فضای‌حالتی است که در آن تصمیم بازیگران به دانش آنها از تعادل وابسته می‌باشد. در فصل چهارم مفاهیم راه‌حل استنتاجیِ به مانند عقلانی‌سازی و حذف حرکات مغلوب که فرض دانستن ماهیت تعادل توسط بازیگران دیگر وجود ندارد را مطالعه می‌گردد. فصل پنجم توضیح مدلی از دانش آورده شده که شالوده راه‌حل‌های تعریف گشته می‌باشد.

۲ تعادل نَش

تعادل نَش[۳۷] یکی از پایه‌ای‌ترین مفاهیم در نظریه بازی‌هاست. در این فصل تعادل نَش را در مبحث بازی‌های استراتژیک و بازی‌های بیزی مرتبط با آن، بررسی خواهیم نمود.

۲-۱ بازی استراتژیک

۲-۱-۱ *تعریف*

یک بازی استراتژیک مدلی از تصمیم‌گیری برهم‌کنشی است که در آن هر تصمیم‌گیر برنامه حرکت خود را یک بار و برای همیشه انتخاب می‌کند، و این انتخاب به صورت همزمان انجام می‌گیرد. این مدل از مجموعه‌ای متناهی از N بازیگر، برای هر بازیگر i، یک مجموعه از *حرکت‌ها* A_i و یک *رابطه اولویت* روی مجموعه نمای حرکات تشکیل شده است. هر نمای حرکت را $a=(a_j)_{j\in N}$ به عنوان یک *برآمد* در نظر گرفته، و مجموعه همه برآمدها $\times_{j\in N} A_j$ را با A نمایش می‌دهیم. تفاوت اساسی یک بازی استراتژیک با یک مساله تصمیم گیری، در لزوم تعریف تابع اولویت هر بازیگر i روی [مجموعه] A به جای A_i می‌باشد: هر بازیگر نه تنها باید نگران حرکت‌های خود باشد، بلکه باید به حرکت بازیگران دیگر هم توجه داشته باشد. به طور خلاصه، تعریف زیر را از بازی استراتژیک ارائه می‌نماییم:

- تعریف ۲-۱ یک **بازی استراتژیک** شامل
  - یک مجموعه متناهی N (مجموعه **بازیگرها**)
  - یک مجموعه ناتهی A_i برای هر بازیگر $i\in N$ (مجموعه **حرکت‌های** موجود برای بازیگر i)
  - یک تابع اولویت $\succeq_i$ روی $A=\times_{j\in N} A_j$ برای هر بازیگر $i\in N$ (**رابطه اولویت** بازیگر i)

اگر مجموعه حرکت‌های هر بازیگر i به صورت A_i متناهی باشد، بازی را *متناهی* می‌نامیم.

---

[۳۷] Nash Equilibrium

درجه بالای انتزاعی بودن این مدل امکان را به وجود می‌آورد که در وضعیت‌های بسیار متنوعی بکار رود. یک بازیگر ممکن است یک انسان به صورت یک فرد، یا هر موجود تصمیم گیرنده دیگری مانند یک دولت، هیات مدیره یک شرکت، رهبر یک جنبش انقلابی یا حتی یک گیاه یا حیوان باشد. مدل هیچ محدودیتی روی مجموعه حرکت‌های موجود برای یک بازیگر ندارد. برای مثال، این امکان وجود دارد که مجموعه مذبور تنها تعداد اندکی عضو داشته باشد و یا یک مجموعه بزرگ شامل نقشه‌های پیچیده که در برگیرنده اتفاقات متنوعی است، باشد. با این وجود محدوده کاربرد مدل با توجه به لزوم وجود یک رابطه اولویت برای هر بازیگر محدود می‌گردد. رابطه الویت یک بازیگر می‌تواند به سادگی بازتابی از احساس او از برآمدهای ممکن یا در مورد یک موجود زنده [مثل یک گیاه] که آگاهانه عمل نمی‌کند، شانس موفقیت او در تولید مثل باشد.

این واقعیت که مدل فوق مدلی بسیار انتزاعی است از یک سو از محاسن آن است که موجب کاربرد آن در محدوده وسیعی از مسائل می‌گردد، اما به دلیل آنکه مدل به ویژگی‌های منحصر به فرد مساله وابسته نیست، نقطه ضعفی برای آن محسوب می‌گردد. در واقع، در این سطح از انتزاع نتایج معدودی از برآمد بازی به دست می‌آید؛ برای به دست آوردن نتایج جالب توجه از یک مساله، می‌بایست به ویژگی‌های خاص آن نیز توجه نمود.

در بعضی از مسایل اولویت‌ها به طور طبیعی بر روی نمای حرکت‌های بازیگران تعریف نمی‌گردد و بر روی نتایج حرکت‌های بازیگر تعریف می‌شوند. برای مثال، در مدل سازی انحصار چند جانبه، مجموعه بازیگران را مجموعه بنگاه-های می‌گیریم و مجموعه حرکت‌های آنها را مجموعه قیمت‌ها [-ی ممکن انتخابی بنگاه‌ها] تعریف می‌نماییم؛ در این مساله ما علاقمند به مدل‌سازی این فرض هستیم که بنگاه‌ها تنها سود را در نظر گرفته و به مجموعه نمای قیمت‌های [ممکن] که این میزان سود را به دست می‌دهد علاقه‌ای ندارد. به منظور مدل سازی چنین شرایطی، مجموعه C از *نتایج* به صورت یک تابع $g: A \rightarrow C$ که نمای حرکت‌ها را به نتایج آن مرتبط می‌نماید و نمای ($\succsim_i^*$) از رابطه الویت‌ها بر روی C تعریف می‌نماییم. رابطه اولویت $\succsim_i$ را نیز برای هر بازیگر i به صورت $a \succsim_i b$ اگر و تنها اگر $g(a) \succsim_i^* g(b)$ باشد، تعریف خواهیم نمود.

گاهی ما درپی مدل سازی شرایطی هستیم که نتیجهٔ نمای حرکت‌های بازیگران قبل از حرکت برای آنها آشکار نیست و تحت اثر متغیرهای تصادفی برونی[۳۸] می‌باشد و تنها بعد از حرکت است که بازیگران می‌توانند پی به نتیجه به برنند. ما این شرایطی را می‌توانیم با تعریف، مجموعه C از نتایج، فضای احتمال Ω، و یک تابع $g: A \times \Omega \rightarrow C$ به صورت یک بازی استراتژیک مدل سازی نماییم، با این تعبیر وقتی که نمای حرکت $a \in A$ بوده و تجللی متغیر تصادفی در $\omega \in \Omega$ باشد آنگاه $g(a, \omega)$ نتیجهٔ [حرکت] خواهد بود. نمای حرکت‌ها به صورت یک لاتاری بر روی C نشان داده می‌شود؛ برای هر بازیگر i رابطه الویت $\succsim_i^*$ می‌بایست برروی مجموعه تمامی این لاتاری‌ها مشخص گردد. رابطه الویت بازیگر i در یک بازی استراتژیک به صورت زیر تعریف می‌گردد: $a \succsim_i b$ خواهد بود اگر و تنها اگر لاتاری $g(a,.)$ حداقل با توجه به رابطه اولویت $\succsim_i^*$ به خوبی لاتاری $g(b,.)$ باشد.

	L	R
T	w_1, w_2	x_1, x_2
B	y_1, y_2	z_1, z_2

شکل ۲-۱. نمایشی ساده از یک بازی دو نفرهٔ استراتژیک که هر کدام از بازیگران دو حرکت دارند.

---

[۳۸] Exogenous

در بسیاری از شرایط رابطه الویت $\succsim_i$ برای بازیگر i در یک بازی استراتژیک با یک **تابع بازده**[۳۹] $u_i : A \to \mathbb{R}$ (همچنین به آن *تابع مطلوبیت* نیز گفته می‌شود)، که هرگاه $a \succsim_i b$ آنگاه $u_i(a) \ge u_i(b)$ باشد، نشان داده می-شود. به مقادیر چنین تابعی **بازدهی‌ها** (یا مطلوبیت‌ها) می‌گوییم. ما [در این کتاب] به کرات رابطه اولویت‌های یک بازیگر را با تابع بازدهی که معرف آن است مشخص کرده‌ایم. در این موارد، به جای $\langle N, (A_i), (\succsim_i) \rangle$ به عنوان تعریف اجزای بازی نشانه $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ را به کار خواهیم برد.

یک بازی استراتژیک متناهی که در آن دو بازیگر وجود دارند به سادگی با یک جدول به مانند شکل ۲-۱ قابل توصیف است. حرکات یک بازیگر در سطرها و حرکات بازیگر دیگر در ستون‌ها قابل مشاهد می‌باشند. دو عددی که محل برخورد سطر r و ستون c در جدول می‌باشند، وقتی که بازیگر سطر r و بازیگر ستون c را انتخاب کرده باشند، مولفه اول بازدهی بازیگر سطر و دیگری بازده بازیگر ستون در بازی می‌باشند. بدین طریق در بازی نشان داده شده در شکل ۲-۱، مجموعه حرکت‌های بازیگر سطر $\{T, B\}$ و برای بازیگر ستون $\{L, R\}$ است، برای مثال بازده برآمد (T, L) برای بازیگر سطر w_1 و بازده بازیگر ستون w_2 خواهد بود. اگر نام بازیگران "۱" و "۲" باشد بطور سنتی بازیگر سطر را "۱" و بازیگر ستون را "۲" می‌نامیم.

۲-۱-۲ *توضیحی بر چگونگی تعبیر نمودن بازی‌های استراتژیک*

تعبیر معمول از یک بازی استراتژیک، مدل واقعه‌ای می‌باشد که تنها یک بار اتفاق می‌افتد؛ هر بازیگر جزییات بازی و این واقعیت که تمامی بازیگران "عقلانی" هستند را می‌داند(بخش ۱-۴ را ببینید) و بازیگران حرکاتشان را تواماً و مستقل از هم انتخاب می‌نمایند. با این تعبیر هر بازیگر هنگامی که حرکت خود را انتخاب می‌کند از انتخاب-هایی که توسط دیگران شده است بی اطلاع است؛ در این مدل هیچ اطلاعاتی (به جزء اصول تعریف شده در مدل) که بتوان برپایه آن رفتار دیگر بازیگران را پیشبینی نمود وجود ندارد.

تعبیر دیگر، که در بیشتر قسمت‌های کتاب پذیرفته شده است، این است که بازیگران می‌توانند چنین پیشبینی از رفتار دیگران را برپایه اطلاعاتی که از روش بازی و یا بازی‌های مشابه که در قبل انجام یافته، انجام دهند(بخش ۱-۵ را ببینید). تنها زمانی می‌توان دنباله‌ای از بازی‌ها را با بازی استراتژیک مدل سازی نمود که ارتباط استراتژیکی میان دنباله این بازی‌ها وجود نداشته باشد. در واقع در این نوع تعبیر از بازی استراتژیک، فردی که بازی را به تعداد زیاد بازی می‌کند می‌بایست تنها بازده لحظه‌ای را در نظر گرفته و اثر حرکت فعلی خود را بر رفتار آینده سایر بازیگران نادیده انگارد. در این نوع تلقی، بازی استراتژیک مدلی مطلوب برای شرایطی است که ارتباط استراتژیک و دائمی میان رویدادن برهمکنش‌ها وجود ندارد، می‌باشد. (در مدل بازی‌های تکرار شونده که در فصل هشتم توضیح داده شده با سریی از برهمکنش‌های استراتژیک که در آن چنین ارتباط دائمی وجود *دارد* مواجه خواهیم شد.)

هنگامی که به حرکت‌های بازیگران در یک بازی استراتژیک به عنوان حرکت‌های "توام" اشاره می‌نماییم، لزوماً به این معنا نیست که این حرکات در یک لحظه از زمان صورت گرفته‌اند. می‌توان این نوع بازی را اینگونه در نظر گرفت که، بازیگران در مکانهای مختلفی در مقابل یک ترمینال رایانه قرار گرفته‌اند و حرکات بازیگران و بازده برای عموم آنها توضیح داده شده (از این رو دانش مشترکی میان تمامی بازیگران وجود دارد). سپس هر بازیگر حرکت خود را انتخاب کرده و با یک پیغام به رایانه مرکزی ارسال می‌دارد؛ زمانی که تمامی پیغام‌ها دریافت شدند، بازیگران از مقدار بازده حرکت خود آگاه خواهند شد. در هر حال، کارایی بازی استراتژیک بسیار گسترده‌تر از مثال بالا می‌باشد. در مدل

---

[۳۹] Payoff function

سازی یک شرایط با استفاده از بازی استراتژیک تنها مساله دارای اهمیت تصمیم گیری مستقل بازیگران است، به زبان دیگر هیچ بازیگری اطلاعی از انتخاب سایر بازیگران قبل از حرکت خود ندارد.

۲-۲ تعادل نَش

تعادل نَش پرکاربردترین مفهوم راه‌حل در نظریه بازی‌ها می‌باشد. این مفهوم یک تعبیر *فضای حالت* گونه از یک بازی استراتژیک است، که در آن هر بازیگر پیشبینی درستی از رفتار سایر بازیگران دارد و بر پایه این پیشبینی عقلانی عمل می‌نمایید. در این مفهوم تلاشی به منظور آزمودن فرایندی که این فضای حالت به وجود آمده، صورت نمی‌پذیرد.

- تعریف ۲-۲ **یک تعادل نَش بازی استراتژیک** $\langle N,(A_i),(\succsim_i)\rangle$، یک نما $a^* \in A$ از حرکت‌های ممکن می‌باشد که برای تمامی بازیگران $i \in N$ خواصیت زیر برای تمامی $a_i \in A_i$ برقرار باشد

$$(a^*_{-i}, a^*_i) \succsim_i (a^*_{-i}, a_i)$$

بنابراین برای آنکه a^* که یک تعادل نَش باشد می‌بایست برای بازیگر i حرکتی که برآمدی مطلوب‌تر از انتخاب a^*_i در پی داشته باشد ممکن نباشد، همچنین هر بازیگر j حرکت تعادلی a^*_j مربوط به خودش را نیز انتخاب نموده باشد. به طور خلاصه، هیچ بازیگری نمی‌تواند با توجه به حرکت‌های داده شده دیگران حرکتی سود آور بر خلاف آنها انجام دهد.

در بعضی از مسایل باز صورتبندی این تعریف به صورت زیر نیز سودمند می‌باشد. برای هر $a_{-i} \in A_{-i}$ می‌توان $B_i(a_{-i})$ را به گونه‌ای تعریف نمود که مجموعه‌ای از بهترین حرکت‌های بازیگر i در مقابله با حرکت های سایرین a_{-i}، باشد:

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : (a_{-i}, a_i) \succsim_i (a_{-i}, a'_i) \text{ for all } a'_i \in A_i\} \tag{۱-۲}$$

ما مجموعه مقادیر تابع B_i را **بهترین تابع پاسخ** برای بازیگر i می‌نامیم. تعادل نَش نمای حرکات a^* است که در آن برای تمامی بازیگران $i \in N$ این نما حرکت در عبارت زیر صدق می‌کند

$$a^*_i \in B(a^*_{-i}) \tag{۲-۲}$$

این صورت بندی مجدد از تعریف اولیه تعادل نَش در یک بازی بیانگر روشی (که لازماً کارا نیست) برای یافتن این تعادل‌ها به ما نشان می‌دهد: در ابتدا بهترین تابع پاسخ برای هر بازیگر محاسبه و در قدم دوم نمای حرکات a^* که برای تمامی $i \in N$ که داری خاصیت $a^*_i \in B(a^*_{-i})$ باشد، تعادل نَش بازی مذکور خواهد بود. اگر توابع B_i برای تمامی بازیگران مقادیری یکنوا[۴۰] داشته باشند قدم دوم در واقع حل دستگاه $|N|$ معادله و $|N|$ مجهولی است که هر مجهول آن به صورت $(a^*_i)_{i\in N}$ می‌باشد.

---

[۴۰] Singleton-Value

۲-۳ چند مثال

بازی‌های کلاسیکی که در بخش زیر ارائه گشته‌اند هر یک شرایط استراتژیک مختلفی را نشان می‌دهند. این بازی‌های بسیار ساده هستند: هر یک فقط دو بازیگر و هر بازیگر تنها دو حرکت ممکن دارد. با این حال هر کدام از این بازی‌های بیانگر ماهیت اصلی انواع برهم‌کنش‌های استراتژیکی می‌باشد که به کرات در شرایط پیچیده‌تر بروز می‌نماید.

◆ مثال ۲-۱ (*باخ یا استراوینسکی؟*) دو فرد تمایل دارند بایکدیگر به یک کنسرت موسیقی بروند که می‌تواند با اجرای آثار باخ و یا استراوینسکی باشد. مساله اصلی آنها همراه یکدیگر بودن در کنسرت است، اما یکی باخ و دیگری استراوینسکی را ترجیح می‌دهد. اولویت‌های آنها با استفاده از تابع بازده‌شان در شکل ۲-۲ نشان داده شده است.

این بازی معمولاً به نام "کارزار دو جنس[۴۱]" نامیده می‌شود؛ برای مطالعه داستان این نام گزاری به لوئیس و رایفا (صفحات ۹۰-۹۱ ، ۱۹۵۷)[۴۲] بنگرید.

این وضعیت شرایطی را مدلسازی می‌نماید که بازیگران متمایل به همکاری در رفتارشان هستند، اما هریک دارای منافع متضادی می‌باشند. این بازی دو تعادل نَش دارد: (*باخ، باخ*) و (*استراوینسکی، استراوینسکی*). از اینرو، این بازی دو فضای حالت دارد: اول آنکه هر دو بازیگر همیشه *باخ* را انتخاب می‌نمایند و دیگر آنگه هر دو همیشه *استراوینسکی* را انتخاب می‌نمایند.

	Bach	*Stravinsky*
Bach	2,1	0,0
Stravinsky	0,0	1,2

شکل ۲-۲. *باخ یا استراوینسکی؟* (مثال ۲-۱)

	Mozart	*Mahler*
Mozart	2,2	0,0
Mahler	0,0	1,1

شکل ۲-۳. بازی همکارانه (مثال ۲-۲)

◆ مثال ۲-۲ (*بازی همکارانه*) به مانند مثال قبل، دو بازیگر تمایل به همراهی یکدیگر در کنسرت دارند، اما بر خلاف آن بازیگران در مورد برنامه موسیقی مطلوب‌تر اتفاق نظر دارند. شکل ۲-۳ نشان دهنده چنین شرایطی است.

[۴۱] Battle of the Sexes (BoS)

[۴۲] Luce and Raiffa (1957, pp. 90-91)

این بازی همانند بازی مثال ۲-۱ دو تعادل نَش دارد: (*ماهلر، ماهلر*) و (*موتسارت، موتسارت*). بر خلاف مثال قبل، در این بازی تمایل مشترکی برای رسیدن یکی از این دو تعادل یعنی (*موتسارت، موتسارت*) دارند؛ اما برپایه تعریف تعادل نَش فضای حالت مربوط تعادل (*ماهلر، ماهلر*) که به برآمدی کمتر از دیگری می‌انجامد حذف نمی‌گردد.

◆ مثال ۲-۳ (*معمای زندانی*) دو متهم به یک جرم در دو سلول جدا از هم نگهداری می‌شوند. اگر هر دو نفر به جرم خود اعتراف نمایند هر یک سه سال به زندان محکوم خواهند شد. اگر تنها یکی از آنها اعتراف نماید آزاد گشته و به عنوان شاهد علیه دیگری شهادت خواهد داد در این حالت زندانی دیگر به چهار سال زندان محکوم می‌گردد. در صورتی هر دو اعتراف ننمایند، آنها به تخلفی کوچکتر محکوم گشته و هر دو یک سال را در زندان خواهند گذراند. در شکل ۲-۴ بازده این بازی و انتخاب‌های بازیگران نشان داده شده است.

در این بازی منفعت بازیگران در همکاری باید یکدیگر است - بهترین بازده برای هر دو بازیگر حالتی می‌باشد که هیچ یک از آنها اعتراف ننمایند- اما هر یک از بازیگران انگیزه‌ای برای استفاده از "سواری مجانی[۴۳]" دارند. هر حرکتی بازیگر انجام دهد دیگری *اعتراف* را به نسبت *اعتراف نکردن* ترجیح خواهد داد، از این رو بازی یک نقطه تعادل نَش (*اعتراف، اعتراف*) دارد.

◆ مثال ۲-۴ (*باز- کبوتر*) دو حیوان شکارچی بر سر یک طعمه مبارزه می‌نمایند. هر کدام می‌تواند رفتار باز و یا کبوتر گونه از خود نشان دهند. بهترین بازده برای هر یک زمانی است که رفتارش شبیه باز بوده و در همان حال دیگری رفتاری کبوتر گونه داشته باشد؛ بدترین بازده زمانی است که هر دو باز گونه رفتار نمایند. برای هر کدام رفتار باز گونه در شرایطی که دیگری رفتار کبوتر گونه داشته باشد، اولویت دارد. بازیی که این شرایط را نشان می‌دهد در شکل ۲-۵ آورده شده است. این بازی دو تعادل نَش دارد، (*کبوتر، باز*) و (*باز، کبوتر*)، که هر یک به دو توافق مختلف در مورد منفعت بازیگران مربوط می‌باشد.

	Don't Confess	*Confess*
Don't Confess	3,3	0,4
Confess	4,0	1,1

شکل ۲-۴. *معمای زندانی* (مثال ۲-۳)

	Dove	*Hawk*
Dove	3,3	1,4
Hawk	4,1	0,0

شکل ۲-۵. *باز- کبوتر* (مثال ۲-۴)

[۴۳] کسب سودی که دیگران هزینه بدست آوردن آن را پرداخت می‌کنند (Free Ride). [مترجم]

◆ مثال ۲-۵ (*سکه‌های جفت*) دو بازیگر میان خط و یا شیر یکی را انتخاب می‌نمایند؛ اگر انتخاب‌های آنها متفاوت باشد، بازیگر ۱ به بازیگر ۲ یک دلار خواهد داد؛ اگر انتخاب‌های آنها مشابه بود بازیگر ۲ به بازیگر ۱ یک دلار پرداخت خواهد کرد. هر بازیگر نیز تنها به پول دریافتی از بازی می‌اندیشد. بازی که مدل چنین شرایطی است در شکل ۲-۶ نشان داده شده. چنین بازیی، که در آن منافع بازیگران به صورت قطری متضاد باشد، "*اکیداً رقابتی*[۴۴]" نامیده می-شود. بازی *سکه‌های جفت* تعادل نَش ندارد.

	Head	*Tail*
Head	$1,-1$	$-1, 1$
Tail	$-1, 1$	$1,-1$

شکل ۲-۶. *سکه‌های جفت* (مثال ۲-۵)

ایده محوری بازی‌های استراتژیک شرایط بسیار پیچیده‌تر از آنچه در این پنج مثال آورده شده است را در بر دارد. در زیر سه خانواده از این نمونه بازی‌ها که بیشتر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند آورده شده است: مساله حراج‌ها، بازی‌های زمانبندی و بازی انتخاب وضعیت.

◆ مثال ۲-۶ (*یک حراج*) شیئی در غالب حراج به یک بازیگر که عضو مجموعه $\{1,...,n\}$ است در ازای وجه نقد واگذار می‌گردد. ارزش شیئی مذبور از دید بازیگر i مقدار v_i است و ارزش گذاری تمامی بازیگران به صورت $v_1 > v_2 > ... > v_n > 0$ می‌باشد. مکانیسمی که برای واگذاری شیئی مذبور استفاده می‌گردد یک حراج [بصورت مزایده] (پیشنهاد در پاکت بسته) می‌باشد: بازیگران همزمان [پاکت سربسته] پیشنهادات (عداد غیر منفی) خود را ارائه می نمایند، و شیئی مذبور به بازیگری واگذار می‌گردد که کمترین اندیس را در میان کسانی که بیشترین پیشنهاد ارائه داده اند، در ازای پرداخت وجه تعلق خواهد گرفت.

در یک حراج به شیوه *اولین قیمت*[۴۵] وجه نقد پرداختی برنده مقدار پیشنهاد او می‌باشد.

✧ تمرین ۲-۱ حراج به شیوه اولین قیمت را به صورت یک بازی استراتژیک بیان کرده و تعادل‌های نَش آن را تحلیل نمایید. به طور خاص، نشان دهید که در تمامی تعادل‌ها بازیگر اول شیئی مذبور را بدست خواهد آورد.

در یک حراج به شیوه *دومین قیمت* پرداخت وجه‌ی که برنده انجام میدهد برابر مقدار بیشترین پیشنهادی است که برنده نشده است می‌باشد (بنابراین اگر تنها یک بازیگر بیشترین پیشنهاد را داده باشد قیمتی که پرداخت خواهد نمود برابر *دومین* پیشنهاد خواهد بود).

✧ تمرین ۲-۲ نشان دهید در یک حراج به شیوه دومین قیمت، پیشنهاد v_i برای هر بازیگر i یک حرکت چیره *ضعیف*[۴۶] است: بازده بازیگر i وقتی پیشنهادی به بزرگی v_i ارائه می‌کند، بدون توجه به حرکت‌های دیگر بازیگران حداقل به بزرگی هر پیشنهاد دیگری است که ارائه نماید. نشان دهید که در هر حال، تعادل‌هایی ("غیر کارا") وجود دارند که در آنها بازیگر اول برنده نیست.

---

[۴۴] Strictly Competitive

[۴۵] First Price

[۴۶] Weakly dominated

◆ مثال ۲-۷ (*جنگ فرسایشی*[۴۷]) دو بازیگر بر سر بدست آوردن شیئی در جدال هستند. ارزش این شیئی برای بازیگر i برابر $v_i > 0$ است. در این مدل، زمان همچون یک متغیر پیوسته از صفر آغاز و الی نهایت ادامه خواهد داشت. هر بازیگر زمانی را که حاضر به انصراف از رقابت و واگذاری شیئی به دیگر است را انتخاب می‌نمایند؛ اگر بازیگر در زمان t از رقابت انصراف دهد، در همان زمان شیئ به دیگری واگذار خواهد شد. اگر هر دو بازیگر همزمان از رقابت انصراف دهند شیئ به تساوی میانشان تقسیم می‌گردد، یعنی به بازیگر i بازدهی با اندازه $v_i/2$ خواهد رسید. در این بازی زمان متغیر اصلی است: تا زمان اولین انصراف به ازای هر واحد گذر زمان یک واحد از بازده بازیگر کم می‌شود.

✧ تمرین ۲-۳ شرایط بازی بالا را به صورت یک بازی استراتژیک بیان نمایید و نشان دهید که تمامی تعادل‌های نَش این بازی انصراف یک بازیگر در ابتدای شروع آن می‌باشد.

◆ مثال ۲-۸ (*بازی انتخاب وضعیت*[۴۸]) هر یک از n نفر می‌توانند میان کاندید شدن و یا نشدن تصمیم بگیرند، و در صورتی که تصمیم به کاندیدا شدن داشته باشند می‌بایست موضع[۴۹] خود را نیز در میان کاندیداها انتخاب نمایند. موضع مطلوب از دید طیف شهروندان نیز بر اساس تابع چگالی f بروی بازه $[0, 1]$ که در آن برای تمامی $x \in [0, 1]$، $f(x) > 0$ توزیع شده است. کاندیداها هریک رای شهروندانی را که مواضع مطلوب آنها به جایگاه خودشان نزدیک‌تر باشد را به خود جذب می‌کنند؛ اگر k کاندیدا موضع واحدی را اتخاذ نمایند هر یک تنها کسر $1/k$ از رای‌های آن موضع خاص را بدست خواهند آورد. برنده این رقابت کاندیدای خواهد بود که بیشترین رای را جذب کرده. هر بازیگر ترجیح می‌دهد برنده واحد باشد تا اینکه در جایگاه اول به صورت مشترک با سایرین قرار گیرد و از طرف دیگر برای او قرار گرفتن در جایگاه اول به صورت مشترک در مقابل وارد نشدن در رقابت اولویت دارد، همچنین هر کدام از بازیگران شرکت نکردن در رقابت را به نسبت بازنده شدن ترجیح می‌دهند.

✧ تمرین ۲-۴ شرایط مثال بالا را به صورت یک بازی استراتژیک بیان نمایید، تعادل‌های نَش این بازی را وقتی $n = 2$ می‌باشد بیابید و نشان دهید وقتی $n = 3$ باشد این بازی تعادل نَش ندارد.

۲-۴ وجود تعادل نَش

همانند آنچه در مورد بازی *سکه‌های جفت* (شکل ۲-۶) دیده شد، تمامی بازی‌های استراتژیک دارای تعادل نَش نیستند. مطالعات گسترده‌ای بر روی شرایطی که در آن مجموعه تعادل‌های نَش تهی نباشد انجام گرفته است. در اینجا تنها به ارائه نتیجه وجود [تعادل نَش] که یکی از ساده‌ترین مسایل مطرح در این زمینه است می‌پردازیم. (با این وجود سطح ریاضی این بخش بسیار پیشرفته‌تر از بیشتر قسمت‌های دیگر کتاب است که به جزئیات وابسته نیستند.)

مطالعه وجود تعادل نَش [در یک بازی] دو فایده اصلی دارد. اول اینکه اگر بازیی داشته باشیم که فرضیات وجود تعادل نَش را داشته باشد، می‌توان امیدوار بود تلاش برای یافتن تعادل به موفقیت انجامد. دوم و مهمتر اینکه، وجود تعادل نشان می‌دهد که بازی سازگار با راه‌حل فضای حالت است. از این گذشته، وجود تعادل‌ها برای یک خانواده‌ای از

---

[۴۷] A War of attrition

[۴۸] A location game

[۴۹] موضع (Position) در این حالت می‌تواند جهت گیری سیاسی کاندیدا باشد، مثلاً میزان چپ‌گرا و یا راست‌گرا بودن وی موضع کاندیدا را مشخص خواهد نمود. مترجم

بازی‌ها اجازه مطالعه خواص آن را بدون آنکه آنها را به صورت صریح یافت و یا با خطر مطالعه مجموعه تهی روبرو بوده باشیم به ما خواهد داد (برای مثال، با استفاده از، تکنیک‌های " ایستای تطبیقی[۵۰]").

برای اینکه نشان دهیم که بازی تعادل نَش دارد کافیست نشان دهیم که یک پروفایل a^* از حرکت‌ها وجود دارد که برای تمامی $i \in N$ در رابطه $a_i^* \in B(a_{-i}^*)$ صحیح باشد(نگاه کنید به رابطه ۲-۲). مجموعه ارزشدار[۵۱] تابع $B: A \to A$ به صورت $B(a) = \times_{i \in N} B_i(a_{-i})$ تعریف کرده. سپس رابطه (۲-۲) را می‌توان به صورت ساده برداری $a^* \in B(a^*)$ نوشت. *قضایای نقطه ثابت*[۵۲] شرایط لازم B را که تحت آن قطعاً مقداری برای a^* که در $a^* \in B(a^*)$ صدق می‌کند را ارائه می‌نمایند. قضیه نقطه ثابتی که استفاده می‌کنیم به صورت زیر است (بر اساس کاکوتانی (۱۹۴۱) [۵۳]).

❖ لم ۲-۱ (قضیه نقطه ثابت کاکوتانی) *فرض کنید* X *یک زیر مجموعه محدب فشرده از فضای* $\mathbb{R}^n$ *و* $f: X \to X$ *یک تابع مجموعه ارزش بوده که در آن*

- برای تمامی $x \in X$ مجموعه $f(x)$ ناتهی و محدب است
- نمودار تابع f بسته است (یعنی، برای تمامی دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ که در آن $y_n \in f(x_n)$ برای تمامی nها، $x_n \to x$، و $y_n \to y$ برقرار باشد، $y \in f(x)$ را داشته باشیم.

سپس، $x^* \in X$ *وجود دارد به صورتی که* $x^* \in f(x^*)$.

✧ تمرین ۲-۵ نشان دهید که هر چهار شرط زیر برای قضیه کاکوتانی لازم می‌باشد. ۱) X فشرده است. ۲) X محدب است. ۳) $f(x)$ برای هر $x \in X$ محدب است. ۴) f نموداری بسته دارد.

رابطه $\succsim_i$ بر روی مجموعه A طوری تعریف می‌کنیم که برروی A_i شبه محدب برای هر $a^* \in A$ مجموعه $\{a_i \in A_i : (a_i^*, a_i) \succsim_i a^*\}$ محدب باشد.

❖ قضیه ۲-۱ *بازی استراتژیک* $\langle N, (A_i), (\succsim_i) \rangle$ *تعادل نَش دارد اگر به ازای تمامی* $i \in N$

- مجموعه A_i از حرکات بازیگر i یک زیر مجموعه ناتهی و محدب فشرده از فضای اقلیدسی باشد

و رابطه الویت $\succsim_i$ به صورت

- پیوسته
- بر روی A_i شبه محدب باشد.

اثبات. تابع $B: A \to A$ به صورت $B(a) = \times_{i \in N} B_i(a_{-i})$ (که B_i بهترین تابع پاسخ بازیگر i، در رابطه (۲-۱) می‌باشد) تعریف می‌نماییم. برای تمامی $i \in N$ مجموعه $B_i(a_{-i})$ به دلیل پیوسته بودن $\succsim_i$ ناتهی بوده و به واسطه شبه محدب بودن $\succsim_i$ بر روی A_i، فشرده و محدب است؛ پیوسته بودن هر $\succsim_i$ موجب بسته بودن نمودار B می‌گردد. بدین گونه با استفاده از قضیه کاکوتانی B دارای یک نقطه ثابت است؛ همانگونه که ذکر شد هر نقطه ثابت یک نقطه تعادل نَش بازی می‌باشد.

لازم به ذکر است این نتیجه تضمین می‌کنند که هر بازی استراتژیکی که دارای شروط مشخصی باشد *حداقل* یک نقطه تعادل نَش دارد. (نتیجه‌ای که در اینجا بررسی نکرده‌ایم یافتن شرایطی است که طی آن یک بازی تعادلِ نَش منحصر به فرد داشته باشد.) همچنین قابل ذکر است که قضیه ۲-۱ قابل استفاده برای هر بازیی که در آن برخی از

---

[۵۰] Comparative static

[۵۱] Set-valued

[۵۲] Fixed Point Theorems

[۵۳] Kakutani (1941)

بازیگران تعداد متناهی زیادی حرکت داشته باشند به این علت که در اینگونه بازی‌ها شرط محدب بودن مجموعه حرکت‌های بازیگران نقض می‌گردد ، نیست.

✧ تمرین ۲-۶ (*بازی‌های متقارن*) یک بازی استراتژیک دو نفره را تحت شرایط قضیه ۲-۱ در نظر بگیرید. با قرار دادن $N=\{1,2\}$ و فرض متقارن بودن بازی: $A_1=A_2$ و $(a_1,a_2)\succsim_1(b_1,b_2)$ اگر تنها اگر $(a_2,a_1)\succsim_2(b_2,b_1)$ برای تمامی $a\in A$ و $b\in B$. با استفاده از قضیه کاکوتانی ثابت کنید که یک حرکت $a_1^*\in A_1$ بگونه‌ای که (a_1^*,a_1^*) تعادل نَش باشد وجود دارد. (به چنین تعادلی *تعادل متقارن* گفته می‌شود.) مثالی از یک بازی متناهی استراتژیک که تنها تعادل متقارن دارد بزنید.

۲-۵ بازی های اکیداً رقابتی

در مورد مجموعه تعادل‌های نَش یک بازی دلخواه نمی‌توان چیزهای زیادی گفت؛ تنها در دسته‌های محدودی از بازی‌ها می‌توان چیزهایی در مورد مشخصه کیفی تعادل‌ها اظهار داشت. یکی از این نوع بازی‌ها، بازی دو نفره‌ای می‌باشد که اولویت‌های دو بازیگر به طور قطری متضاد باشند. برای سهولت در این بخش بازیگران را "۱" و "۲" می‌نامیم (به عبارت دیگر $N=\{1,2\}$).

- تعریف ۲-۲ یک بازی استراتژیک $\langle\{1,2\},(A_i),(\succsim_i)\rangle$ **اکیداً رقابتی** است اگر برای هر $a\in A$ و $b\in B$ داشته باشیم $a\succsim_1 b$ اگر و تنها اگر $b\succsim_2 a$ باشد.

گاهی به بازی اکیداً رقابتی بازی *مجموع صفر*[۵۴] نیز می‌گویند، به این دلیل که اگر رابطه الویت $\succsim_1$ بازیگر اول را با تابع بازدهی u_1 و رابطه اولویت بازیگر دوم را تابع بازدهی u_2 نشان دهیم آنگاه $u_1+u_2=0$ خواهد شد.

در صورتی که بازیگر i حرکتی را با فرض اینکه بازیگر دیگر بدون توجه به حرکت او حرکتی را انجام دهد که بیشترین ضرر ممکن را بر وی وارد نماید انتخاب کند، می توان بازیگر i را بازیگر *ماکسیمین*[۵۵] نامید. اکنون نشان خواهیم داد که در یک بازی اکیداً رقابتی که داری تعادل نَش است، جفت حرکتی تعادل نَش خواهند بود اگر و تنها اگر حرکت‌های هر یک از بازیگران به صورت ماکسیمین باشد. این نتیجه بسیار جالب توجه است از اینرو که رابطه‌ای میان تصمیم‌گیری فردی و مفهوم محوری تعادل نَش ایجاد می‌نماید. در بسط این نتیجه می‌توان نتیجه قویتری را نیز اثبات کرد که در بازی‌های اکیداً رقابتی داری تعادل‌های نَش، بازده هر یک از این تعادل‌ها با یکدیگر برابر می‌باشند. چنین نتیجه‌ای به ندرت در بازی‌های که اکیداً رقابتی نیستند به وجود می‌آید.

- تعریف ۲-۲ فرض کنید بازی $\langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ یک بازی اکیداً رقابتی باشد. حرکت $x^*\in A_1$ یک حرکت **ماکسیمین کننده برای بازیگر اول** است اگر برای تمامی $x\in A_1$

$$\min_{y\in A_2}u_1(x^*,y)\geq\min_{y\in A_2}u_1(x,y)$$

به صورت مشابه، حرکت $y^*\in A_2$ یک حرکت **ماکسیمین کننده برای بازیگر دوم** است اگر برای تمامی $y\in A_2$

$$\min_{x\in A_1}u_1(x,y^*)\geq\min_{x\in A_1}u_1(x,y)$$

---

[۵۴] Zerosum
[۵۵] Maximizes

به بیان غیر ریاضی، حرکت ماکسیمین کننده است برای بازیگر i حرکتی است که بیشترین بازده *تضمینی*[۵۶] را برای او در پی داشته باشد. یک [حرکت] ماکسیمین کننده برای بازیگر اول حل مساله $\max_x \min_y u_1(x,y)$ و برای بازیگر دوم $\max_y \min_x u_2(x,y)$ می‌باشد.

همان طور که قبلاً گفته شد برای راحتی می‌توان رابطه اولویت بازیگر اول را با تابع بازده u_1 و از طرف دیگر با استفاده از این واقعیت که $u_2 = -u_1$ نشان می‌دهیم بدون آنکه به کلیت مساله خللی وارد شود. نتیجه زیر نشان می دهد که ماکسیمین سازی بازده بازیگر دوم معادل مینیماکس سازی بازده بازیگر اول است.

❖ لم ۲-۲ *فرض کنید بازی* $\langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ *یک بازی اکیداً رقابتی باشد. آنگاه* $\max_{y\in A_2} \min_{x\in A_1} u_2(x,y) = -\min_{y\in A_2} \max_{x\in A_1} u_1(x,y)$*. دیگر آنکه* $y \in A_2$ *مساله* $\max_{y\in A_2} \min_{x\in A_1} u_2(x,y)$ *را حل نماید اگر و تنها اگر مساله* $\min_{y\in A_2} \max_{x\in A_1} u_1(x,y)$ *را نیز حل می‌گرداند.*

اثبات. برای هر تابع f داریم $\min_z(-f(z)) = -\max_z f(z)$ و $\arg\min_z(-f(z)) = \arg\max_z f(z)$. در پی آن می‌توان برای هر $y \in A_2$ داشته باشیم $-\min_{x\in A_1} u_2(x,y) = \max_{x\in A_1} (-u_2(x,y)) = \max_{x\in A_1} u_1(x,y)$. اکنون $\max_{y\in A_2} \min_{x\in A_1} u_2(x,y) = -\min_{y\in A_2} [-\min_{x\in A_1} u_2(x,y)] = -\min_{y\in A_2} \max_{x\in A_1} u_2(x,y)$؛ علاوه بر آن $y \in A_2$ جواب مساله $\max_{y\in A_2} \min_{x\in A_1} u_2(x,y)$ است اگر و تنها اگر جواب مساله $\min_{y\in A_2} \max_{x\in A_1} u_1(x,y)$ نیز باشد.

نتیجه زیر ارتباط بین تعادل‌های نَش یک بازی اکیداً رقابتی و مجموعه جفت‌های [حرکت‌های] ماکسیمین کننده آن را نشان می‌دهد.

❖ قضیه ۲-۲ *فرض کنید بازی* $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ *یک بازی اکیداً رقابتی باشد.*

الف. *اگر* (x^*, y^*) *یک تعادل نَش بازی* G *باشد آنگاه* x^* *یک [حرکت] ماکسیمین کننده بازیگر اول و* y^* *یک ماکسیمین کننده برای بازیگر دوم می‌باشد.*

ب. *اگر* (x^*, y^*) *یک تعادل نَش بازی* G *باشد آنگاه* $\max_x \min_y u_1(x,y) = \max_y \min_x u_2(x,y) = u_1(x^*, y^*)$*، از اینرو تمامی تعادل‌های نَش بازی* G *بازدهی یکسانی خواهد داشت.*

ج. *اگر* $\max_x \min_y u_1(x,y) = \max_y \min_x u_2(x,y)$ *(به طور خاص، اگر* G *داری تعادل نَش باشد (قسمت ب را ببینید))،* x^* *یک [حرکت] ماکسیمین کننده بازیگر اول و* y^* *یک ماکسیمین کننده بازیگر دوم باشد ، آنگاه* (x^*, y^*) *تعادل نَش بازی* G *خواهد بود.*

اثبات. ابتدا قسمت‌های (الف) و (ب) را اثبات می‌نماییم. فرض کنید (x^*, y^*) یک تعادل نَش بازی G باشد. سپس $u_2(x^*, y^*) \ge u_2(x^*, y)$ برای تمامی $y \in A_2$ و یا ، از آنجا که $u_2 = -u_1$، برای تمامی $y \in A_2$ خواهیم داشت $u_1(x^*, y^*) \le u_1(x^*, y)$. بنابراین $u_1(x^*, y^*) = \min_y u_1(x^*, y) \le \max_x \min_y (x,y)$. به همین صورت، برای تمامی $x \in A_1$ عبارت $u_1(x^*, y^*) \ge u_1(x, y^*)$ و بنابر $u_2 = -u_1$، می‌توان نوشت

---

[۵۶] guarantee

برای تمامی $x \in A_1$، همچنین $u_1(x^*, y^*) \ge \min_y u_1(x, y)$ صحیح $u_1(x^*, y^*) \ge \max_x \min_y (x, y)$ خواهند بود. پس $u_1(x^*, y^*) = \max_x \min_y (x, y)$ و x^* یک ماکسیمین کننده برای بازیگر اول است.

به دلیل مشابه برای بازیگر دوم می‌توان نوشت y^* ماکسیمین بازیگر دوم و $u_2(x^*, y^*) = \max_y \min_x (x, y)$ خواهد بود، بنابراین $u_1(x^*, y^*) = \min_y \max_x (x, y)$ صادق می‌باشد.

به منظور اثبات قسمت (ج)، قرار دهید $v^* = \max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y)$. با استفاده از لم ۲-۲ خواهیم داشت $\max_x \min_y u_1(x, y) = -v^*$. از آنجا که x^* یک ماکسیمین کننده برای بازیگر اول است خواهیم داشت $u_1(x^*, y) \ge v^*$ برای تمامی $y \in A_2$؛ همچنین از آنجا که y^* یک ماکسیمین کننده برای بازیگر دوم است $u_2(x, y^*) \ge -v^*$ برای تمامی $x \in A_1$. با قرار دادن $y = y^*$ و $x = x^*$ در دو نامساوی فوق به $u_1(x^*, y^*) = v^*$ خواهیم رسید، و با استفاده از این واقعیت که $u_2 = -u_1$، به این نتیجه خواهیم رسید که (x^*, y^*) تعادل نَش بازی G می‌باشد.

نتیجه قسمت (ج) از این رو در خور توجه می‌باشد که با استفاده از آن می‌توان تنها با حل مساله‌های $\max_x \min_y u_1(x, y)$ و $\max_y \min_x u_2(x, y)$ استراتژی تعادل نَش بازیگران را یافت. استفاده از این واقعیت خصوصاً در مسایلی که بازیگران تصادفی عمل می‌نمایند (برای مثال تمرین ۱,۳۶ را ببینید) اغلب سودمند است.

قابل ذکر است که با استفاده از قسمت‌های (الف) و (ب)، تعادل‌های نَش بازی اکیداً رقابتی *تبادل‌پذیر*[۵۷] هستند: اگر (x, y) و (x', y') تعادل‌های [نَش] باشند آنگاه (x', y) و (x, y') نیز تعادل‌های بازی خواهند بود.

قسمت (ب) نشان می‌دهد که $\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y)$ برای هر بازی اکیداً رقابتی که داری تعادل نَش باشد صحیح است. قابل توجه است که نامساوی $\max_x \min_y u_1(x, y) \le \min_y \max_x u_1(x, y)$ می‌تواند کلی‌تر بیان نمود: برای هر x' خواهیم داشت $u_1(x', y) \le \min_y \max_x u_1(x, y)$ برای تمامی y صادق خواهد بود. (در صورتی نقاط بیشینه و کمینه خوشتریف نباشند می‌توان به جای بیشینه‌سازی و کمینه‌سازی به ترتیب از سوپریمم‌سازی و اینفیمم‌سازی استفاده نمود.) بنابر این در هر بازی (چه بازی مذکور اکیداً رقابتی باشد و چه نباشد) بازدهی که بازیگر اول برای خود تضمین می‌کند *بیشترین* میزانی است که بازیگر دوم می تواند بازده او را پایین نگه دارد. فرض اینکه بازی تعادل نَش دارد، فرضی ضروری برای به وجود آوردن نامساوی عکس [نا مساوی بالا] است. برای مشاهد این مطلب به بازی *سکه‌های جفت* توجه نمایید (شکل ۲-۶)، که در آن $\max_x \min_y u_1(x, y) = -1 < \min_y \max_x u_1(x, y) = 1$.

اگر تساوی $\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y)$ برقرار باشد سپس می‌توان این بازده را،که برابر بازده تعادل بازیگر اول است، **ارزش**[۵۸] این بازی نامید. بر اساس قضیه ۲-۲ اگر v^* ارزش بازی اکیداً رقابتی باشد آنگاه هر استراتژی تعادلی بازیگر اول حداقل بازده تعادل v^*را تضمین خواهد نمود، و برای بازیگر دوم نیز حداقل بازده را برابر بازده تعادل یعنی مقدار $-v^*$ تضمین می‌نماید، از اینرو هر استراتژی اینچنینی بازیگر دوم تضمین می‌نماید که بازده بازیگر اول حداکثر برابر بازده تعادل خواهد بود. در بازی‌های که اکیداً رقابتی نیستند استراتژی تعادل بازیگر به طور کلی این مشخصه را دارا نیستند (برای مثال بازی باخ یا استراوینسکی(شکل ۲-۲) را ملاحظه نمایید).

✧ تمرین ۲-۷ بازی G را یک بازی اکیداً رقابتی داری تعادل نَش در نظر بگیرد.

---

[۵۷] interchangeable

[۵۸] Value

الف. نشان دهید که اگر تعدادی از بازدهای بازیگر اول در بازی G افزوده شوند به طوری که بازی [جدید] به وجود آمده G' اکیداً رقابتی باشد آنگاه هیچ تعادلی که در آن بازده بازی برای بازیگر اول کمتر از حالت تعادل در بازی G شود نخواهد داشت. (توجه شود که ممکن است G' هیچ تعادلی نداشته باشد.)
ب. نشان دهید که اگر بازگر اول از یکی از حرکت‌هایش در G محروم گردد آنگاه در این حالت نیز بازدهی بیشتر از بازده تعادل در G نصیبش نخواهد شد.
ج. با مثالی نشان دهید که هیچ یک از دو مشخصه بالا لازماً در بازی‌های که اکیداً رقابتی نیستند صحیح نمی-باشد.

۲-۶ بازی های بیزی: بازی استراتژیک با اطلاعات ناکافی

۲-۶-۱ *تعاریف*

اغلب مواقع به مدل سازی شرایطی که در آن گروهی [از بازیگران] نسبت به مشخصات گروهی دیگر تردید دارند علاقه‌مندایم. مدل بازی بیزی، که بسیار به بازی استراتژیک نزدیک است، به این منظور طراحی گشته است.

به مانند بازی‌های استراتژیک، بازی بیزی نیز دارایی دو اصل مجموعه N از بازیگران و نمای (A_i) از مجموعه حرکت‌های آنها می‌باشد. عدم قطعیت بازیگران نسبت به یکدیگر را با معرفی مجموعه Ω از شرایط ممکن "حالات طبیعت"، که هر حالت بیانگر تمامی مشخصات بازیگران می‌باشد را مدل سازی می‌نماییم. برای راحتی مطالعه تصور می‌نماییم که مجموعه Ω متناهی است. هر بازیگر i یک *باور پیشین*[۵۹] در مورد حالت طبیعت دارد که با اندازه احتمال p_i روی Ω تعریف شده است. در هر بار بازی حالتی از حالات طبیعت $\omega \in \Omega$ واقع می‌شوند. به منظور مدل سازی اطلاعات بازیگران درباره حالات طبیعت نمای از *تابع علامت*[۶۰] (τ_i) تعریف می‌کنیم، که در آن $\tau_i(\omega)$ علامتی است که بازیگر i وقتی حالت طبیعت ω باشد ،قبل از انتخاب حرکتش، مشاهد می‌نماید. با قرار دادن T_i به عنوان مجموعه‌ای از مقادیر ممکن τ_i؛ این مجموعه را مجموعه *انواع*[۶۱] بازیگر i می‌نامیم. فرض می‌کنیم که $p_i(\tau_i^{-1}(t_i)) > 0$ برای تمامی $t_i \in T_i$ باشد (به عبارت دیگر، بازیگر i احتمالی پیشین مثبتی به هر یک از اعضای T_i اختصاص می‌دهد). اگر بازیگر i علامت $t_i \in T_i$ را دریافت نماید آنگاه او نتیجه می‌گیرد که حالت [طبیعت] در مجموعه $\tau_i^{-1}(t_i)$ وجود دارد؛ بازیگر *باور پسین*[۶۲] را هر حالت $\omega \in \Omega$ که واقع شده است بدین گونه که اگر $\omega \in \tau_i^{-1}(t_i)$ باشد احتمال $p_i(\omega)/p_i(\tau_i^{-1}(t_i))$ و در غیر این صورت صفر را نسبت خواهد داد (احتمال وقوع ω به شرط $\tau_i^{-1}(t_i)$). برای مثال، اگر $\tau_i(\omega)=\omega$ برای تمامی $\omega \in \Omega$ باشد آنگاه بازیگر i اطلاعات کاملی در مورد حالت طبیعت داراست. از سوی دیگر، اگر $\Omega = \times_{i\in N} T_i$ بوده برای هر بازیگر i اندازه احتمال p_i اندازه حاصلضرب روی Ω و $\tau_i(\omega)=\omega$ خواهد شد آنگاه علامت‌های دریافتی بازیگران مستقل خواهد گردید و بازیگر i از علامت دریافتی‌اش چیزی در مورد اطلاعات دیگران فرا نمی‌گیرد.

---

[۵۹] Prior belief
[۶۰] Signal function
[۶۱] Types
[۶۲] Posterior belief

همانند بازی استراتژیک، هر بازیگر [برای انتخاب حرکت خود] کل نمای حرکت‌ها را در نظر می‌گیرد؛ علاوه بر آن [در بازی‌های بیزی] بازیگران می‌بایست حالت طبیعت را نیز در نظر داشته باشند. حال حتی اگر بازیگر از حرکت هر بازیگر دیگر در هر حالت طبیعت آگاه باشد، ممکن است در مورد حرکت خود که بر اساس جفت مرتب (a,ω) می‌بایست انجام دهد از آن رو که اطلاعات کاملی در مورد حالت طبیعت ندارد مطمئن نخواهد بود. به این دلیل در مدل [بازی استراتژیک] نمای اولویت‌ها ($\succsim_i$) که بر روی لاتاری $A\times\Omega$ تعریف گشته است را اضافه می‌نماییم (مانند قبل، $A=\times_{j\in N}A_j$). به طور خلاصه، تعریف زیر را ارائه می‌نماییم.

- تعریف ۲-۳ یک **بازی بیزی** شامل
  - یک مجموعه متناهی N (مجموعه **بازیگران**)
  - یک مجموعه متناهی Ω (مجموعه **حالات**)

  برای هر بازیگر $i\in N$
  - یک مجموعه A_i (یک مجموعه از **حرکت‌ها** در دسترس بازیگر i)
  - یک مجموعه متناهی T_i (مجموعه **علامت‌های** که بازیگر i ممکن است مشاهد می‌کند) و تابع $\tau_i:\Omega\to T_i$ (**تابع علامت** بازیگر i)
  - یک اندازه احتمال p_i روی Ω (**باور پیشین** بازیگر i) که $p_i(\tau_i^{-1}(t_i))>0$ برای تمامی $t_i\in T_i$
  - یک رابطه اولویت $\succsim_i$ روی مجموعه اندازه احتمال $A\times\Omega$ (**رابطه اولویت** بازیگر i)، که در آن $A=\times_{j\in N}A_j$

توجه نمایید که این تعریف امکان داشتن باورهای پیشین متفاوت را به بازیگران می‌دهد. این باورها ممکن است با یکدیگر مرتبط باشند؛ معمولاً آنها یکسان و سازگار با اندازه "واقعی" هستند. اغلب از این مدل در شرایطی که حالت طبیعت نمای از متغیرهای اولویت‌های بازیگر باشد استفاده می‌گردد (برای مثال، نمایی از ارزش‌گذاری آنان بر روی یک شیئی). به هر حال، مدل [بازی بیزی] بسیار کلی است؛ در بخش ۲-۶-۳ شرایطی را تصور خواهیم نمود که هر یک از بازیگران نسبت به *دانش*[۶۳] [شناخت حالات طبیعت و باور پیشین] دیگران نامطمئن باشد.

بعضی مواقع بازی بیزی بر پایه فضای حالت Ω توصیف نمی‌گردد، بلکه به "صورت تقلیل یافته‌ای" که در آن پایه اساسی اطلاعات بازیگران مجموعه نمای انواع ممکن آنان است تعریف می‌گردد.

اکنون به تعریف تعادل در بازی‌های بیزی خواهیم پرداخت. در هر بار بازی بازیگر از نوع [دانش] خود مطلع است و دیگر نیازی نیست در هر پیشامد فرضی که برای انواع بازیگران دیگر مطرح است برنامه‌ریزی نماید. بنابراین، ممکن است تصور شود تعادل می‌بایست در هر حالت به صورت جدا [از سایر حالات] تعریف گردد. اما، در بسیاری از حالات تمایل بازیگر به تعیین بهترین حرکت به دارا بودن باوری در مورد عملی که سایرین ممکن است در حالات دیگر انجام دهند وابسته است، از اینرو بازیگر ممکن است اطلاعات ناقصی از حالت [طبیعت] داشته باشد. از آن گذشته، به وجود آوردن چنین باوری ممکن است وابسته به حرکت انتخابی خود بازیگر در حالات دیگر باشد، در نتیجه همچنین بازیگران دیگر نیز ممکن است اطلاعات ناقصی داشته باشند.

بدین گونه تعادل نَش بازی بیزی $\langle N,\Omega,(A_i),(T_i),(\tau_i),(p_i),(\succsim_i)\rangle$ تعادل نَش بازی استراتژیک G^* است که در آن برای هر $i\in N$ و هر علامت ممکن $t_i\in T_i$ بازیگر (i,t_i) وجود دارد ("نوع t_i از بازیگر i"). مجموعه حرکت‌های این بازیگر (i,t_i) به صورت A_i است؛ از اینرو مجموعه نمای حرکت در G^* برابر مجموعه

---

[۶۳] knowledge

$\times_{j\in N}(\times_{t_i\in T_j} A_j)$ می‌باشد. اولویت‌های بازیگر (i,t_i) به صورت زیر تعریف می‌گردد. باور پسین بازیگر i به انضمام نمای حرکت a^* در بازی G^* ، لاتاری $L_i(a^*,t_i)$ برروی $A\times\Omega$ می‌سازند: مقدار احتمالی $L_i(a^*,t_i)$ را به $((a^*(j,\tau_j(\omega)))_{j\in N},\omega)$ تخصیص می‌دهد که در واقع باور پسین بازیگر i خواهد بود، وقتی که بازیگر علامت t_i دریافت نماید حالت [طبیعت] ω خواهد بود ($a^*(j,\tau_j(\omega))$ حرکت بازیگر $(j,\tau_j(\omega))$ در نمای a^* می‌باشد). بازیگر (i,t_i) در بازی G^* نمای حرکت a^* را بر b^* ترجیح خواهد داد اگر و تنها اگر لاتاری $L_i(a^*,t_i)$ را بر لاتاری $L_i(b^*,t_i)$ ترجیح دهد. به طور خلاصه، تعریف زیر را ارائه می‌نماییم.

- تعریف ۲-۴ تعادل نَش بازی بیزی $\langle N,\Omega,(A_i),(T_i),(\tau_i),(p_i),(\succsim_i)\rangle$ تعادل نَش بازی استراتژیکی است که به صورت زیر تعریف می‌گردد.
  - مجموعه بازیگران مجموعه تمامی جفت‌های (i,t_i) برای $i\in N$ و $t_i\in T_i$ می‌باشد.
  - مجموعه حرکت‌های هر بازیگر (i,t_i) مجموعه A_i می‌باشد.
  - رابطه اولویت ترتیبی $\succsim^*_{(i,t_i)}$ برای هر بازیگر به صورت $a^*\succsim^*_{(i,t_i)} b^*$ تعریف خواهد گشت اگر و تنها اگر $L_i(a^*,t_i)\succsim^*_{(i,t_i)} L_i(b^*,t_i)$ باشد، که در آن $L_i(a^*,t_i)$ یک لاتاری بر روی $A\times\Omega$ است که [مقدار] احتمال وقوع $p_i(\omega)/p_i(\tau_i^{-1}(t_i))$ هنگامی که $\omega\in\tau_i^{-1}(t_i)$ بوده باشد را به [حرکت] $((a^*(j,\tau_j(\omega)))_{j\in N},\omega)$ اختصاص می‌دهد و در غیر این صورت احتمال صفر را به این حرکت خواهد داد.

به طور خلاصه، برای هر بازیگر تعادل نَش در یک بازی بیزی بهترین حرکت موجود بر اساس علامت دریافتی و باور او از حالت طبیعت و حرکت‌های سایر بازیگران که از این علامت استنتاج گردیده است خواهد بود. به خاطر داشته باشید که به منظور تعیین اینکه یک نمای حرکت تعادل نَش بازی بیزی باشد، کافیست بدانیم چگونه در یک بازی بیزی بازیگر لاتاری‌های روی $A\times\Omega$ که یک توزیع [احتمال] همسان روی Ω دارند را با یکدیگر مقایسه می‌نماید: بازیگر هیچگاه نیازی به مقایسه لاتاری‌ها در شرایطی که این توزیع احتمال متفاوت باشد ندارد. بنابراین، با این رویکرد مشخصات اولویت‌های بازیگران در یک بازی بیزی حاوی اطلاعات بیشتری از آنچه لازم است دارا می‌باشد. (این [اطلاعات] زاید تشابه‌ای با آنچه در مورد بازی‌های استراتژیک گفته شد دارد: به منظور تعریف تعادل نَش یک بازی استراتژیک ما تنها نیازمندایم که بدانیم چگونه بازیگر i هر برآمد (a_{-i},a_i) را با برآمد دیگر (a_{-i},b_i) مقایسه می‌نماید.)

۲-۶-۲ *چند مثال*

◆ مثال ۲-۹ (*حراج به شیوه دومین قیمت*) یک حراج متفاوت از مثال ۲-۶ که به صورت مزایده و [با استفاده از مکانیسم انتخاب] دومین قیمت برگزار میگردد را که در آن هر بازیگر i از ارزشگذاری فردی خودش v_i آگاه ولی در مورد ارزشگذاری دیگران نا مطمئن است را در نظر آورید. به تعبیر دقیق‌تر، تصور نماید که مجموعه ارزش‌های ممکن مجموعه متناهی V بوده و هر بازیگر بر این باور باشد که ارزش انتخابی سایرین از همان توزیع روی V گرفته شده است. چنین شرایطی را به صورت بازی بیزی به صورت زیر مدل‌سازی می‌نماییم

- مجموعه N از بازیگران که به صورت $\{1,\dots,N\}$ است
- مجموعه Ω از حالات که به صورت V^n (مجموعه نمای از ارزشگذاری‌ها) است
- مجموعه A_i از حرکت‌ها برای هر بازیگر i که $\mathbb{R}_+$ است

- مجموعه T_i از علامت‌ها که i می‌تواند دریافت کند به صورت V است
- تابع علامت τ_i از i که با $\tau_i(v_1,...,v_n)=v_i$ تعریف گشته است
- باور پیشین p_i از i که با استفاده از $p_i(v_1,...,v_n)=\prod_{j=1}^{n}\pi(v_j)$ برای توزیع‌های احتمال π بروی V داده شده باشد
- رابطه اولویت بازیگر i اگر بازیگر کمترین اندیس $a_i \geq a_j$ را برای تمامی $j \in N$ داشته باشد با انتظار وی از متغیر تصادفی که ارزشش در حالت $(v_1, \dots, v_2)$ برابر $v_i - \max_{j\in N\setminus\{i\}} a_j$ نشان داده می‌شود، و در غیر این صورت برابر 0 خواهد بود.

بازی داری یک نقطه تعادل نَش a^* که در آن $a^*(i, v_i) = v_i$ برای تمامی $i \in N$ و $v_i \in V = T_i$ (مقدار پیشنهاد هر بازیگر مقدار ارزشگذاری وی است) می‌باشد. در واقع (به مانند تمرین ۲-۲) این [حرکت] یک حرکت چیره ضعیف برای هر نوع از هر بازیگر که پیشنهادی برابر ارزشگذاریش می‌دهد است.

✧ تمرین ۲-۸ دو بازیگر تمایل دارند بایکدیگر به یک کنسرت موسیقی بروند که می‌تواند با اجرای آثار باخ و یا استراوینسکی باشد. به مانند بازی مطرح گشته در مثال ۲-۱ هدف اصلی آنها همراهی یکدیگر در این برنامه است؛ اما هیچ یک از دو بازیگر از اینکه دیگری کدام یک از این دو کنسرت را مطلوب‌تر می‌داند آگاه نمی‌باشد. اولویت‌های هر یک از بازیگران با انتظار آنان از مقدار بازدهی‌شان نشان داده می‌شود، بازده خالص برآمدهای بازیگران هم‌ارز[۶۴] آنچه در شکل ۲-۲ آورده شده است می‌باشد. این شرایط را به صورت یک بازی بیزی مدل سازی نموده و تعادل‌های نَش آن را برای تمامی باورهای ممکن بیابید. به طور خاص نشان دهید که احتمال مثبتی وجود دارد که بازیگران هر یک به کنسرت متفاوتی از دیگری بروند.

✧ تمرین ۲-۹ (*بازی معاوضه*[۶۵]) هر یک از دو بازیگر یک بلیت جایزه دریافت خواهند کرد که بر روی هر یک از آنان یک عدد از زیر مجموعه‌ای متناهی S در بازه $[0, 1]$ نوشته شده است. عددی که روی بلیت نوشته شده اندازه جایزه‌ای است که بازیگر دریافت خواهد کرد. دو جایزه به طور مشابه و مستقل با توزیع F، توزیع گشته‌اند. از هر کدام از بازیگران به طور همزمان و مستقل پرسیده می‌شود که آیا تمایل به معاوضه جایزه خود با دیگری دارند. اگر هر دو بازیگر موافق باشند جایزه‌ها را با یکدیگر عوض خواهند کرد؛ در غیر این صورت هر یک تنها جایزه خود را دریافت خواهند نمود. هدف بازیگران بیشینه سازی بازده انتظاری خود می‌باشد. این شرایط را به صورت یک بازی بیزی مدل سازی نماید و نشان دهید که در هر تعادل نَش بیشترین جایزه که بازیگران مایل به مبادله آن هستند برابر کمترین مقدار ممکن جایزه می‌باشد.

✧ تمرین ۲-۱۰ با استفاده از یک بازی بیزی دو نفره به صورت زیر، نشان دهید اطلاعات بیشتر ممکن است موجب ضرر بازیگر گردد. بازیگر اول کاملاً با اطلاع ولی بازیگر دوم اینگونه نیست؛ بازی تعادل نَش منحصر به فردی داشته باشد که در این تعادل یکتا بازده بازیگر دوم بیش از زمانی باشد که از نوع بازیگر اول آگاه باشد.

۲-۶-۳ *توضیحاتی در مورد مدل بازی بیزی*

ایده اینکه شرایط عدم اطمینان بازیگران در مورد مشخصه‌های یکدیگر را می‌توان با بازی‌های بیزی مدل سازی نمود مربوط به هَرسَنئی (۱۹۶۷ و ۱۹۶۸)[۶۶] می‌باشد. هَرسَنئی فرض می‌نماید که باور پیشین بازیگران مشابه یکدیگر

---

[۶۴] Analogous
[۶۵] An exchange game
[۶۶] Harsanyi (1967/68)

است، او بر این ادعاست که تمامی تفاوت میان دانش بازیگران ناشی از مکانیسم برونی است که اطلاعات را به بازیگران تخصیص می‌دهد و [تفاوت اطلاعاتی آنها] از تفاوت میان باور اولیه بازیگران نمی‌باشد. در بخش ۵-۳ نشان خواهیم داد که فرض یکسان بودن باور پیشین استلزامی قوی برای رابطه میان باورهای پسین بازیگران می‌باشد. (برای مثال، بعد از آنکه دو بازیگر علامت محیط را دریافت کردند دیگر "دانش مشترک" میانشان نمی‌تواند وجود داشته باشد در این صورت به باور بازیگر اول احتمال اینکه حالت طبیعت در مجموعه داده شد باشد برابر α و به باور بازیگر دوم این احتمال برابر $\beta \neq \alpha$ خواهد بود، هر چند ممکن *است* که بازیگر اول بر این باور باشد که احتمال α و بازیگر دوم این احتمال را β داند، اما یکی از آنان در مورد باور بازیگر دیگر مطمئن نباشد.)

یک بازی بیزی را نه تنها می‌توان در شرایطی به کار برد که عدم اطمینان در مورد بازده بازیگران دیگر وجود دارد، بلکه به مانند مثال ۹-۲ می‌توان آن را در شرایطی که هر بازیگر نسبت به *دانش* بازیگران دیگر دچار عدم اطمینان باشد نیز به کار برد.

برای مثال یک بازی بیزی که در آن مجموعه بازیگران $N = \{1, 2\}$ و مجموعه حالات $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ را در نظر بگیرید. باور پیشینی که هر بازیگر به هر کدام از حالات نسبت داده است برابر احتمال $\frac{1}{3}$ می‌باشد. تابع علامت دهنده را نیز به صورت $\tau_1(\omega_1) = \tau_1(\omega_2) = t_1'$ ، $\tau_1(\omega_3) = t_1''$ و $\tau_2(\omega_1) = t_2'$ ، $\tau_2(\omega_2) = \tau_2(\omega_3) = t_2''$ تعریف کرده و اولویت‌های بازیگر اول $(b, \omega_j) \succ_1 (c, \omega_j)$ برای $j = 1, 2$ و $(c, \omega_3) \succ_1 (b, \omega_3)$ برای نمای‌های حرکت b و c خواهد بود، در حالی که بازیگر دوم بین تمامی جفت‌های (a, ω) بی‌تفاوت است. در حالت ω_1 چنین بازیی بازیگر دوم از ترجیح b به c توسط بازیگر اول آگاه است، در حالی که در حالت ω_2 دقیقاً نمی‌داند که بازیگر اول b را به c ترجیح می‌دهد و یا c را از b بهتر می‌داند. نظر به اینکه در حالت ω_1 بازیگر اول نمی‌داند که حالت [واقعی طبیعت] ω_1 و یا ω_2 است، او در این شرایط نمی‌داند که (الف) بازیگر دوم می‌داند که او b را به c را ترجیح می‌دهد، یا (ب) بازیگر دوم مطمئن نیست که آیا او b را به c ترجیح می‌دهد یا برعکس.

آیا تمامی حالت‌های که بازیگران در مورد دانش سایر بازیگران دوچار عدم قطعیت می‌باشند را می‌توان با بازی بیزی مدل‌سازی نمود؟ فرض کنید که بازده بازیگران تنها به یک متغیر $\theta \in \Theta$ وابسته است. مجموعه X_i بر مجموعه باورهای ممکن هر بازیگر i دلالت می‌نماید. بدین طریق باور هر بازیگر j یک توزیع احتمال بر روی $\Theta \times X_{-j}$ خواهد بود. مجموعه باورهای هر بازیگر می‌بایست برحسب باورهای سایر بازیگران تعریف گردد. از اینرو پاسخ به سوال مطرح گشته بدهی نیست و هم‌ارز این پرسش است که آیا می‌توان گردایه[۶۷] $\{X_j\}_{j \in N}$ از مجموعه‌-های را برای تمامی $i \in N$ با این مشخصه که با توزیع‌های احتمال روی $\Theta \times X_{-j}$ یکریخت[۶۸] باشد یافت. اگر چنین کاری ممکن باشد، می‌توانیم با قرار دادن $\Omega = \Theta \times (\times_{i \in N} X_i)$ به عنوان فضای حالت، از بازی بیزی برای مدل‌سازی هر شرایطی که در آن بازیگر نتها نسبت به بازده سایر بازیگران بلکه باور آنها دوچار عدم قطعیت باشد استفاده نمود. پاسخ مثبت به این پرسش توسط مِرتِنس و زَمیر (۱۹۸۵)[۶۹] داده شده است. در اینجا دلایل این مدعا حذف گردیده است.

---

[۶۷] collection

[۶۸] Isomorphic

[۶۹] Mertens and Zamir (1985)

یادداشت ها

نماد گزاری بازی استراتژیک مجرد ریشه در کارهای بُریل (۱۹۲۱)[70] و فُن‌نِیومن (۱۹۲۸)[71] دارد. اصطلاح تعادل نَش به طور مشخص در زمینه این بازی‌ها در نَش (۱۹۵۰a)[72] مورد استفاده قرار گرفته است؛ ایده پایه آن نیز به کُرنت (۱۸۳۸)[73] باز می‌گردد. ایده اثبات قضیه ۲-۱ از نَش (۱۹۵۰a، ۱۹۵۱)[74] و گلِکسبرگ (۱۹۵۲)[75] سرچشمه گرفته است، با این وجود نتیجه اثبات آنها کمی متفاوت می‌باشد. همان طور که عنوان گشت نتیجه مشابه قضیه ۳-۱ نیکایدو و ایزودا (۱۹۵۵)[76] است. نتیجه تمرین ۲-۶ برگرفته از نَش (۱۹۵۱)[77] می‌باشد. ایده ماکسیمین سازی به اوایل قرن هجدهم میلادی بازی می گردد (به کوهن (۱۹۶۸) [78] بنگرید). ایده اصلی قضیه ۲-۲ مربوط به فُن‌نِیومن (۱۹۲۸)[79] بوده است؛ نظریه بازی‌های کاملاً رقابتی توسط فُن‌نِیومن و مُورگِسترون (۱۹۴۴)[80] توسعه یافته است. بازی‌ها بیزی توسط هَرَسنئی (۱۹۶۷ و ۱۹۶۸)[81] تعریف و مطالعه گشته‌اند.

مساله *معمای زندانیان* در غالب مقاله چاپ نشده رایفا (۱۹۵۱)[82] و فلاد (در سال ۱۹۵۱، گزارش کار مشترک با دایشیر) برای اولین بار وارد این ادبیات گردید. تعبیر استاندارد بازی‌ها مربوط به تراکر (رایفا (۱۹۹۲، صفحه ۱۷۳ را ببینید)) می‌باشد. بازی باخ یا استراوینسکی بر اساس لوئیس و رایفا (۱۹۵۷)[83] است. بازی باز-کبوتر به نام "جوجه "[84] شناخته می‌شود. حراج (مثال ۲-۶ و ۲-۹) به طور رسمی برای اولین بار توسط ویکری (۱۹۶۱)[85] مطالعه شده است. جنگ فرسایشی در مثال ۲-۷ برگرفته از مینارد اسمیت (۱۹۷۴)[86]، بازی انتخاب موقعیت در مثال ۲-۸ بر اساس هتلینگ (۱۹۲۹)[87] و بازی تمرین ۲-۹ نیز بر اساس برامس، کیلیگور و دیویس (۱۹۹۳)[88] می‌باشد.

---

[70] Borel (1921)
[71] von Neumann (1928)
[72] Nash (1950a)
[73] Cournot (1838)
[74] Nash (1950a, 1951)
[75] Glicksberg (1952)
[76] Nikaido and Isoda (1955)
[77] Nash (1951)
[78] Kuhn (1968)
[79] von Neumann (1928)
[80] Morgenstern and von Neumann (1944)
[81] Harsanyi (1967/68)
[82] Raiffa (1951)
[83] Luce and Raiffa (1957)
[84] Chicken
[85] Vickery (1961)
[86] Maynard Smith (1974)
[87] Hostelling (1929)
[88] Brams, Kilgour and Davis (1993)